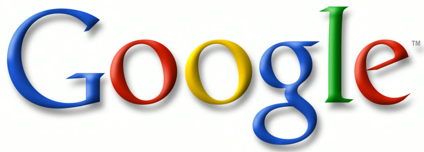
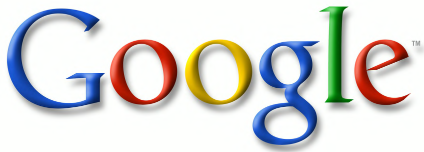

Google





DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.

Nr. 88.

KRYSTALLOMETRIE,

oder

Krystallonomie und Krystallographie

auf eigenthümliche Weise und

mit Zugrundelegung

neuer allgemeiner Lehren der reinen Gestaltenkunde

etc.

bearbeitet von

JOHANN FRIEDRICH CHRISTIAN HESSEL.

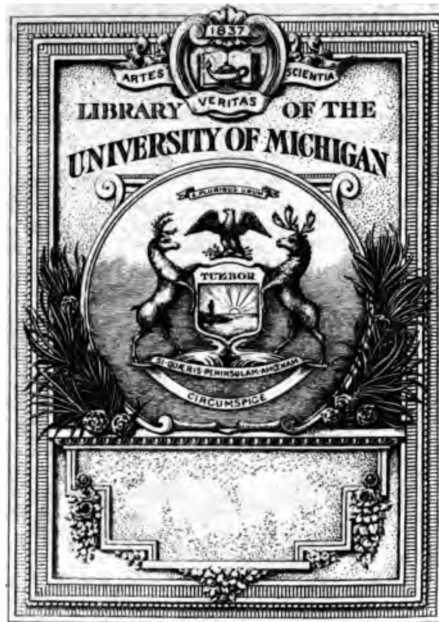
(1830.)

Erstes Bändchen.

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.

in v
nich
der
tori
Ein
Wis
steh
hin
Aus
Fe
Ke
Ge

de
For
gen
den
ein
in
abe
in j
inz
es
wi
Fo
vo



vissenschaften
erkannt wird,
l Verbreitung
gen, Labora-
vorhandenen
Inhaltes der
haben hoch-
einen Mangel
enschaftlichen
st dies das
Mangel an
elchen das

Klassiker
In handlicher
n Abhandlun-
n der Lehren-
soll dadurch
as Eindringen
Dasselbe ist
utung. Denn
Keime, welche
ben, sondern
och der Ent-
eitenden und
he Fundgrube

.aften sollen ihrem Namen gemäss die rationellen Naturwissenschaften, von der Mathematik bis zur Physiologie umfassen und werden Abhandlungen aus den Gebieten der **Mathematik**, **Astronomie**, **Physik**, **Chemie** (einschliesslich **Krystallkunde**) und **Physiologie** enthalten.

Die allgemeine Redaktion führt von jetzt ab Professor Dr. Arthur von Oettingen (Leipzig); die einzelnen Ausgaben werden durch hervorragende Vertreter der betreffenden Wissenschaften besorgt werden. Die Leitung der einzelnen Abtheilungen übernahmen: für Astronomie Prof. Dr. Bruns (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. Wangerin (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. Groth (München), für Pflanzenphysiologie Prof. Dr. W. Pfeffer (Leipzig), für Chemie Prof. Dr. W. Ostwald (Leipzig).

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Chemie und Krystallographie:

Nr. 3. **J. Dalton** u. **W. H. Wollaston**, Abhandlungen zur Atomtheorie (1803—1808.) Herausg. v. W. Ostwald. Mit 1 Taf. (30 S.) *M* —.50.

» 4. **Gay-Lussac**, Über das Jod. (1814.) Herausgegeben v. W. Ostwald. (52 S.) *M* —.80.

» 8. **A. Avogadro** u. **Ampère**, Abhandlungen zur Molekulartheorie. (1811 u. 1814.) Mit 3 Taf. Herausg. von W. Ostwald. (50 S.) *M* 1.20.

» 9. **H. Hess**, Thermochemische Untersuchungen. (1839—1842.) Herausg. v. W. Ostwald. (102 S.) *M* 1.60.

» 22. **Woehler** u. **Liebig**, Untersuchungen üb. d. Radikal d. Benzoesäure. ...n Herm. Kopp. Mit 1 Taf. (43 S.) *M* 1.—.

...ber die Constitution der organischen Säuren. ...ben von Herm. Kopp. (86 S.) *M* 1.40.

Fortsetzung auf der dritten Seite des Umschlages.

KRYSTALLOMETRIE,

oder

Krystallonomie und Krystallographie,

auf eigenthümliche Weise und

mit Zugrundelegung neuer allgemeiner Lehren
der reinen Gestaltenkunde,

sowie mit vollständiger Berücksichtigung

der wichtigsten Arbeiten und Methoden
anderer Krystallographen,

bearbeitet von

JOH. FRIEDR. CHRISTIAN HESSEL,

Dr. d. Med. und Phil. und Prof. der Mineralogie zu Marburg.

(1830.)

Besonders abgedruckt aus Gehler's phys. Wörterbuche.

Erstes Bändchen.

Mit 8 Tafeln.

Herausgegeben
von
E. Hess.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1897.

[III]

Krystallometrie, oder Krystallonomie und Krystallographie.

Von

Joh. Friedr. Christian Hessel.

Aus der Vorrede.

Ich habe gesucht, die Lehre von der Gleichwerthigkeit räumlicher Dinge auf rein mathematische Weise begründet durchzuführen und die verschiedenen Arten dieses Gleichwerthigseins schärfer, als bisher geschah, zu unterscheiden. Auf die hierdurch gewonnenen Lehren gestützt, konnte nun die Lehre von den verschiedenen Arten von Axen ausgebildet und begründet und dann die Gesammtheit der möglichen Arten von Strahlensystemen und Axensystemen, die dem Gleichwerthigkeitsprincipe gemäss sich aufstellen lassen, entwickelt und die jedem Strahlensysteme (oder Axensysteme), d. h. jeder solchen Art*) entsprechenden Gestalten zusammengestellt werden. — Dass eine consequente Durchführung dieser Lehren für die Wissenschaft unnöthig sei, wird niemand behaupten wollen, und daher wird auch niemand es tadeln können, dass nicht bloss die Gestaltensysteme, welche in der Krystallenwelt vorkommen, sondern alle *denkbaren* Gestaltensysteme auf gebührende Weise sind berücksichtigt worden. — Obgleich theils stillschweigend, theils deutlich ausgesprochen die Gleichwerthigkeitsverhältnisse der Theile bei allen bekannten [IV]

*) Man kann sich nämlich erlauben, statt Art der Strahlensysteme (oder Strahlenvereine) u. s. w. bloss Strahlensystem zu sagen.

Aufstellungen der sogenannten Krystallsysteme vorzüglich berücksichtigt und zum Grunde der Eintheilungen gelegt sind, so war doch bis jetzt noch keine solche Eintheilung vorhanden, welche sowohl dieses ihr Hauptprincip bis in die letzten Glieder consequent verfolgt hätte, als auch frei geblieben wäre von aller Einmischung anderer, mehr oder weniger fremdartiger Eintheilungsgründe. Als solcher fremdartiger Eintheilungsgrund ist zu betrachten die Berücksichtigung der Neigung derjenigen Axen gegen einander, von deren Betrachtung man ausgehen zu müssen glaubte, weil dieser Eintheilungsgrund namentlich in den Fällen, wo die Hauptaxe unter mehr als drei verschiedenen Arten einheitlich vorhandener Axen gewählt werden kann, Abtheilungen erzeugt, die in dem Gleichwerthigkeitsprincipe nicht begründet sind, also den, diesem Principe entsprechenden, Abtheilungen nicht *beigeordnet*, sondern, wenn es nöthig wäre, *untergeordnet* werden können. —

Hinsichtlich auf die von mir gebrauchte deutsche Kunstsprache gestehe ich sehr gerne, dass sie ihre Mängel hat*): eine deutsche Kunstsprache für diese mathematische Wissenschaft zu besitzen, schien mir aber ein *zu sehr wesentliches* Bedürfniss, als dass ich nicht hätte versuchen sollen, mein Scherflein dazu beizutragen, eine solche zu begründen, trotz dem zu erwartenden Tadel. — Der, welcher tadeln will, möge sich die Fragen stellen: 1) ist irgend eine ebenso vollständige Kunstsprache für dieses Fach vorhanden gewesen? 2) ist insbesondere eine ebenso vollständige deutsche Kunstsprache in irgend einem Werke über diesen Gegenstand dargelegt? 3) sind die vorhandenen älteren Kunstausdrücke sprach- und sachrichtiger oder bezeichnender, als die hier gebotenen? 4) kann die, auch hier nothwendige, Consequenz nicht bedingen, dass selbst in dem Falle, wo eine bereits eingebürgerte [V] Benennung gut ist, sie durch eine andere verdrängt werden müsse, die den Grundsätzen der befolgten Namengebung besser entspricht? u. s. w.; und hat er sich diese Fragen beantwortet, so hoffe ich mit Zuversicht, sein Bestreben zu tadeln werde sich verwandeln in ein Bestreben, mit schonender Hand zu verbessern, und solche Verbesserung muss Jedem wünschenswerth scheinen. — Am unvollkommensten

*) deren manche jedoch, falls dieselbe, wie ich, ihrer sonstigen Brauchbarkeit wegen, hoffe, Eingang findet, sich in Zukunft leicht verbessern lassen.

sind die Benennungen der einfachen, nicht ringsum endlich begrenzten Gestalten. —

Bei dieser Gelegenheit muss ich erwähnen, dass ich die Zeichen $\cong$, $|=|$ und $|\cong|$ im Texte so gebraucht habe, dass sie beim Lesen theils als Beiwörter gebeugt werden, theils als Nebenwörter ungebeugt bleiben müssen. Im ersten Falle sind sie am besten zu übersetzen durch die Ausdrücke »einander ebenbildlich gleich, einander gegenbildlich gleich, einander ebenbildlich und gegenbildlich gleich«, wo die Worte »*einander*« und »*gleich*« nur dann füglich weggelassen werden können, wenn weder Deutlichkeit noch Wohlklang darunter leidet (eine Regel, die ich selbst, wenn statt der Zeichen die Worte gesetzt sind, nicht immer so streng beobachtet habe, als mir dies jetzt, obgleich eine Undeutlichkeit hierbei nicht entstanden ist, wünschenswerth zu sein scheint); im zweiten Falle dagegen ist das Wort »einander« gewöhnlich wegzulassen, nicht gut aber ist es (wie von mir häufig geschehen), das Wort »gleich« wegzulassen. — Der Satz: »*zu denen sie sich gegenbildlich verhalten*« heisst daher besser ausgedrückt »*denen sie gegenbildlich gleich sind*«; und auf ähnliche Weise sind daher manche solche Ausdrücke einer Verbesserung fähig und bedürftig.

Bei den die Stelle von Namen oder von Beschreibungen vertretenden Bezeichnungen der Flächenarten und Strahlenarten der Gestalten habe ich zu zeigen gesucht, dass es zweckmässig sei, für *jedes* Gestaltensystem (nicht bloss für die in der Natur vorkommenden Krystallsysteme) die drei wichtigsten Arten von Axen desselben als Messungsaxen [VI] zu benutzen, und dass diese Bezeichnung, ihrer Allgemeingültigkeit und ihrer Consequenz wegen, bei übrigens gleicher Einfachheit den Vorzug vor jener verdiene, bei welcher theils Axen einer Art, theils solche zweier Arten, theils solche dreier Arten als Messungsaxen gebraucht werden. — Vorzüglich wichtig für diese Bezeichnung aber ist die Auffindung des höchst merkwürdigen Gesetzes, dass jeder Messungsstrahl für jede 1fach 1gliedrige Messungszelle, der er angehört, angesehen werden könne als der Stellvertreter einer auf bestimmte Weise geordneten und gestellten Verbindung (Permutation) der sämmtlichen Strahlen seiner Art, und dass man ihm daher, für diese Zelle, ein + oder — Zeichen beilegen könne, je nachdem jene Permutation selbst als eine positive oder negative zu betrachten ist, *so dass die Gesammtheit der möglichen Arten der*

Beachtung dieser Vorzeichen gerade der Gesammtheit der möglichen Arten 1- *und m-maassiger Gestaltensysteme entspricht.* —

Da die hierdurch gewonnenen Bezeichnungsarten bis jetzt die einzigen sind, welche auf consequente Weise die Eigenthümlichkeiten aller denkbaren Arten von Gestaltensystemen (folglich auch von Krystallsystemen) darzustellen und auszudrücken im Stande sind, sich auch durch grosse Einfachheit auszeichnen, so halte ich es für zweckmässig, hier noch eine Verbesserung derselben zu erwähnen, welche ich seit dem Abdrucke dieses Artikels vorgenommen habe. — Um nämlich dasjenige + oder — Zeichen, welches einem Maassstrahle a, R oder r für eine Zelle zusteht (ohne Rücksicht auf den Längenwerth des in ihm abgeschnittenen Stückes), sofern er Stellvertreter einer positiven oder negativen Permutation der sämmtlichen Strahlen seiner Art ist (Vorzeichen des Strahles), bequemer zu unterscheiden von dem + oder — Zeichen, das dem in diesem Strahle zu nehmenden Maassstücke zusteht, je nachdem es in der Richtung dieses Strahles selbst oder in dessen Verlängerung nach rückwärts über den Anfangspunkt [VII] hinaus liegt (Vorzeichen des Maassstückes oder Maasszählers), habe ich den Gebrauch angenommen, statt des negativen Vorzeichens des Strahles für eine Zelle den scharfen Accent (′) anzuwenden, da dieser bereits schon öfter von anderen Schriftstellern (*Hauy*, *Weiss*, *Grassmann* u. A.) in einem ähnlichen Sinne ist gebraucht worden. Das entsprechende + Zeichen ist der schwere Accent (\`), und um das Zeichen $\mp$ auszudrücken, dient der doppelte Accent (^), dessen umgekehrtes Bild (ˇ) dann natürlich die Stelle des Zeichens $\pm$ vertritt. Die Zelle $+a-R-r$ z. B. ist also $=\grave{a}\acute{R}\acute{r}$, und die Zelle $\pm a \mp Rr$ ist $=\check{a}\hat{R}r$; die Zelle $+(aRr)$ wird $=\overbrace{aRr}^{\grave{}}$ und $-(aRr)=\overbrace{aRr}^{\acute{}}$ u. s. w. — Sind x, y, z Maasszähler und bedeuten die Buchstaben a, R, r zugleich die gerengesetzlichen Urmaasse in den Strahlen a, R, r, so erhalten diese Urmaasse die accentförmigen Vorzeichen und nicht die Maasszähler, wenn das Zeichen ein vollständiges ist, z. B. $x\cdot\grave{a}$, $y\cdot\acute{R}$, $z\cdot\grave{r}$; ebenso ist $+3\grave{a}$, $-4\hat{R}$, $+2\hat{r}$ $=+(+3a)$, $\mp(-4R)$, $\mp(+2r)$ u. s. w. Werden aber die Urmaasse aus dem Zeichen weggelassen, so kann man, wo es nöthig ist, die accentförmigen Vorzeichen über die

Maasszähler setzen, z. B. $\grave{3}\,\acute{2}\,\hat{1}$. Nicht nöthig ist dies, wenn viele Flächenarten oder Strahlenarten (und namentlich viele für jede Zellenart), nach den Zellenarten geordnet, denen sie angehören, aufgezählt werden, weil hier einmalige vorausgeschickte Angabe der Beschaffenheit der betreffenden Zellenarten genügt.

So wird z. B. die Gesammtheit der Zeichen

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2\check{a} & \hat{R} & r \\ 3\check{a} & \hat{R} & r \\ \check{a} & 2\hat{R} & r \\ 2\check{a} & 3\hat{R} & 2r \\ 3\check{a} & 3\hat{R} & 2r \end{array}\right\}$$

abgekürzt dargestellt durch

$$\left\{\begin{array}{ccc} \check{a} & \hat{R} & r \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2. \end{array}\right.$$

[VIII] Ob ein solches Zeichen ein Flächenzeichen oder ein Strahlenzeichen sei, zeige ich, wenn es nöthig ist, an durch Vorsetzung von F oder S.

Von vorzüglicher Wichtigkeit ist die Bezeichnung durch einfache, 1fach 1gliedrige Zellen besonders für solche Gestalten, welche einspringende Kanten oder Ecken besitzen, und daher ist sie auch ganz besonders wichtig als Hülfsmittel zu einer Bezeichnung der Zwillingskrystalle, sofern man sie als eigenthümliche Gestalten betrachtet und von der Zusammensetzung aus zwei Individuen absieht. So ist z. B. Fig. 256 eine gleichstellig 2endige 2fach 6gliedrige Gestalt, welche zweierlei Arten von Begrenzungsflächen zeigt; die einen, wie *ade*, sind 1fach 1gliedrige, die anderen, wie *def*, sind 2fach 1gliedrige Flächen; ist nun $\frac{1}{2}ap = a$ und $\frac{1}{2}ig = R$ und $\frac{1}{2}ig\sqrt{\frac{3}{4}} = r$, so besitzt demnach dieser Körper in jeder einfachen 1fach 1gliedrigen Zelle aRr mit dem Verhältnisse der Urmaasse $a : R : r = \frac{1}{2}ap : \frac{1}{2}ig : \frac{1}{2}ig\sqrt{\frac{3}{4}}$ zwei Flächen, die für diese Zelle den beiden Zeichen 112 und — 111 oder $+1+1+2$ und $-1+1+1$ entsprechen (wobei die Vorzeichen als solche der Maasszähler gelten). — Keine andere bisher bekannte Bezeichnung war im Stande, die verschiedenen 48-Flächner, deren Flächen senkrecht sind auf den 48 Trägern einer einzigen bestimmten Trägerart, von einander zu unterscheiden und als abgesonderte Gestalten dem Auge gleichsam vorzuführen, auf eine Art, wie dies durch S. 35 u. 36 des zweiten Bändchens [IX] geschehen ist, und doch bietet gerade das Studium der

hauptaxenlosen Gestalten, wenn man es von dieser Seite angreift, eine überaus reiche Ausbeute für die Gestaltenlehre im Allgemeinen dar und ist daher auch für die Krystallkunde insbesondere von nicht geringem Interesse. So ist, um nur ein hierher gehöriges Beispiel zu erwähnen, der bekannte Eisenkieszwilling, den *Weiss* zuerst beschrieben hat, anzusehen als eine Gestalt, welche 1) die Flächen eines 48wandigen Dreieckflächners und 2) die Flächen eines 6×4Flächners enthält. Für die einfache, 1fach 1gliedrige Zelle aRr mit dem Maassverhältnisse $\sqrt{3} : \sqrt{\frac{3}{2}} : 1$ ist das Zeichen jener $= \frac{1}{2}\,1\,1$ und das Zeichen dieser $= 1\,\frac{2}{3}\,1$, während das Zeichen des 12-Sterzenflächners, der eine der beiden Zwillingshälften darstellt, $= \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}^{\backprime}\,1$ und das der anderen Zwillingshälfte $= \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}'\,1$ ist.

Wenn gleich die Bezeichnungen einer und derselben Fläche in ihrer Erstreckung durch die verschiedenen Zellen, im Texte, gewissermaassen nur als Vorbereitungen zur Lösung der wichtigeren Rechnungsaufgaben, die hier vorkommen, dazustehen scheinen, so ist doch aus dem eben Gesagten, verglichen mit den betreffenden Stellen des Textes, ersichtlich, dass in der Brauchbarkeit zu diesem Zwecke nicht ihr ganzer Werth bestehe, sondern dass sie für die allgemeine Gestaltenlehre eine weit grössere Bedeutung haben, die hier nur gelegentlich mit erwähnt werden konnte.

Das Gerengesetz und die Lehre von der Zeigerfläche anlangend glaube ich durch die Art der Darstellung, die ich beim Vortrage derselben befolgt habe, und durch die Nachweisung der allgemeinen Brauchbarkeit der Zeigerflächen die Wissenschaft einigermaassen gefördert zu haben. Diese Brauchbarkeit der Zeigerflächen erstreckt sich natürlich auch auf solche Gestaltensysteme, bei denen nicht alle Träger zu einem und demselben gerengesetzlichen Trägervereine gehören, wenn gleich hier die Maasszähler nicht rational sein müssen.

---

[1]

Krystall.

Allgemeine Begriffe.

Crystall; *Crystallus;* Cristal; *Crystal.* So heisst jeder natürliche Körper von fester gleichartiger Masse, welcher bei der Annahme der ihm jetzt zustehenden Beschaffenheit nach eigenthümlichen, von seinem Wesen abhängigen Gesetzen durch mehr oder weniger vollkommene Ebenen begrenzt wurde.

Körper, die zwar eine von Ebenen begrenzte Form besitzen, ähnlich dem Krystalle, diese aber durch äussere Veranlassung anzunehmen gezwungen worden waren, können als *Nachahmungen* von Krystallen oder als *uneigentliche* Krystalle betrachtet werden. Hierher gehören 1) Ausfüllungen krystallförmiger, leergewesener Räume durch eine Masse, welche für sich solche Gestalten zu bilden nicht im Stande sein würde, wie diejenige ist, welche sie hier durch den gegebenen Raum, den sie erfüllen muss, anzunehmen gezwungen ist (*Afterkrystalle* von Manganerz, Rotheisenstein u. s. w. in Formen, welche vorher von Kalkspathkrystallen eingenommen worden waren u. s. w.). 2) Krystallförmig gestaltete Massen, entstanden durch Umwandlung oder durch ganze oder theilweise Zersetzung anderer Massen mit Beibehaltung der Form, welche diese vor der Zerstörung einnahmen (*Pseudomorphosen* von Bleiglanz oder Schwefelblei, entstanden aus Krystallen von phosphorsaurem Bleioxyde, mit Beibehaltung der Krystallgestalt dieser Substanz). 3) Durch Menschenhand absichtlich gebildete Modelle von Krystallen u. s. w.

Das Wort *Krystall* (κρύσταλλος) heisst Eis, wurde später angewandt zur Bezeichnung des Bergkrystalls und erhielt endlich diejenige Ausdehnung des Sinnes, in welcher wir es jetzt anwenden.

[2] Die Wissenschaft von den Krystallen heisst *Krystallkunde* (*Crystallologia*). Sie zerfällt in die Lehre von den mathematischen Eigenschaften der Krystalle, *Krystallometrie*, und in die Lehre von der Krystallisirung oder Entstehung der Krystalle, *Krystallogenie.* Die Krystallometrie, insofern sie eigenthümliche Gesetze entwickelt, von denen die verschiedenen

geometrischen Eigenschaften der fraglichen Körper abhängen, heisst *Krystallonomie* oder *Krystallgesetzlehre.* Insofern es aber einer der wichtigsten Gegenstände der Krystallometrie ist, Krystalle mit Hülfe einer, in Worten oder Zeichen bestehenden, Kunstsprache beschreiben zu lehren, heisst sie auch *Krystallographie.*

Die Krystallometrie hat es sonach zu thun mit Grösse und Form der Krystalle und ihrer Theile, der Flächen, Kanten, Ecken u. s. w.

Grösse der Krystalle.

Die Grösse der Krystalle von einer und derselben Masse ist im Allgemeinen sehr verschieden; deshalb sind genaue Angaben darüber von geringem Interesse, obgleich es keineswegs unwichtig sein dürfte, dass manche Substanzen kaum die Grösse einer oder einiger Kubiklinien erreichen, wie z. B. der Diamant, während andere bis zu $\frac{1}{4}$ Kubikfuss und darüber Körperinhalt haben können, z. B. die Granaten, und noch andere selbst die Grösse eines Kubikfusses übersteigen, z. B. der Bergkrystall; während von der andern Seite Krystalle derselben Substanz vorkommen, von so geringem Volumen, dass sie dem freien Auge kaum sichtbar sind.

Grösse der Winkel und Kanten und Messung der Winkel.

Von der Grösse der Krystalle ist natürlich auch die Grösse ihrer Flächen und die Länge der diese begrenzenden Seiten, bei übrigens gleichen Umständen, abhängig und daher eben so veränderlich. Soll aber die Form von zwei Krystallen gleich sein und nur die Grösse verschieden, so muss in beiden die Grösse der einander entsprechenden Winkel dieselbe sein. Messung der Winkel also ist für die Krystallometrie ein Gegenstand von Wichtigkeit. Die Krystalle haben nämlich, gleich allen von Ebenen begrenzten Körpern, *Kanten* (d. h. gegenseitige Begrenzungen je zweier benachbarter Oberflächentheile eines Körpers in Linien) und *Ecken* (entstehend durch das Zusammentreffen von 3 oder mehreren Krystallflächen in einem Punkte, in welchem sich auch 3 oder mehrere Kanten schneiden).

[3] Bei Ecken sowohl als bei Kanten kommt in Betracht: 1) die Länge der Kantenlinien, 2) die Grösse jeder Kante, d. h. die Grösse der Neigung der beiden sie bildenden Flächen gegen einander, und 3) die Grösse der ebenen Winkel, welche je zwei in einem Punkte zusammentreffende Kantenlinien bilden. Die Grösse der Neigung zweier Flächen aber wird bestimmt durch die Grösse eines Winkels, gebildet von zwei geraden Linien, jede in einer der beiden Flächen liegend und senkrecht zur fraglichen Kantenlinie, aus einem und demselben Punkte errichtet*).

In der frühesten Zeit pflegte man die Winkelbestimmungen an den Krystallen dadurch vorzunehmen, dass man Seiten und einzelne Diagonallinien der Flächen derselben mit dem Zirkel maass und daraus ebene Winkel und Neigungswinkel berechnete. Später erfand *Carangeau* das sogenannte *Anlege-Goniometer* oder Hand-Goniometer (Goniomètre par application), mit dessen Hülfe *Romé de l'Isle* und später *Hauy* und Andere weit genauere Angaben zu liefern im Stande waren, als ihre Vorgänger. Dieses Goniometer besteht aus zwei linealartigen Vorrichtungen *ab* und *df*, die der Länge nach mit Spalten *gh* Fig. 213.
und *lm* versehen sind, welche dazu dienen, eine kleine Axe *c* anzubringen, zur Umdrehung für das eine Lineal *df* und zur Verschiebung beider, um beliebige Verkürzung der Schenkel *ac* und *dc* erzeugen zu können. Das Lineal *ab* ist mit seiner Mittellinie *gk* an einem Arme *ck* befestigt mittelst der Axe bei *c* und mittelst eines Stiftes bei *e*, welcher Arm mit einem in Grade getheilten Halbkreise *rts* zusammenhängt. Die Befestigung muss so sein, dass der Arm *cf* auf der Ebene des Kreisbogens aufliegt und die Linie *nf* sich jedesmal in der Richtung eines der Radien befindet; ebenso muss auch die eine durch die [4] Mitte der Axe *c* und durch die Mitte des Stiftes bei *e* gehende gerade Linie *gk* die Punkte des Kreisbogens 0 und 180 mit einander verbinden. Die Spalte *ik* in dem

*) Um die durch Messung oder Rechnung gefundene Neigung zweier Flächen auszudrücken, dient das Zeichen ‖, so dass z. B. $A \parallel B = 30^\circ$ oder $mno \parallel mnp = 70^\circ$ Ausdrücke sind, welche die Neigung von *A* gegen *B* oder von *mno* gegen *mnp* angeben.

Dasselbe Zeichen gebraucht man gleichfalls, wenn von der Neigung zweier Linien gegen einander die Rede ist und deren Durchschnittspunkt nicht mit einem besonderen Buchstaben bezeichnet ist, so wie auch, wenn man die Neigung einer Linie gegen eine Ebene angeben will.

Lineale *ab* dient mit zur Verschiebung dieses Lineals an dem Stifte bei *e*.

Beim Gebrauche hält man den zu messenden Krystall in der linken Hand, während man mit dem Daumen und Zeigefinger der rechten das Lineal *df* bewegt und zu bewirken sucht, dass die einander zugekehrten Ränder der Schenkel *ca* und *cd* beider Lineale den zu messenden Neigungswinkel einschliessen, und da diese Ränder eine kleine Breite haben, so beurtheilt man durch das Gefühl und durch das Auge, ob ein so vollkommenes Anliegen stattfindet, dass zwischen den fraglichen Krystallflächen und den sie berührenden Theilen der Lineale kein Lichtstrahl hindurchdringen könne. Die Stelle, in welcher sich dann die zugeschärfte, in der Richtung des Halbmessers liegende, Kante *nf* des Lineals *df* befindet, giebt die Anzahl der Grade an, welche der fragliche Neigungswinkel misst. Ist aus irgend einem Grunde die grössere Länge der Schenkel *ca* und *cd* hinderlich, so werden sie durch die erwähnte Verschiebung verkürzt; oft ist dann auch zugleich der Theil *ts* des Gradbogens selbst der genauen Anlegung im Wege und deshalb ist der Halbkreis bei *t* getheilt und mit einem Gelenke verbunden; die Feder *co* ist bestimmt, den Bogen *ts* mit dem andern *tr* und dem Mittelpunkte *c* in einerlei Ebene zu erhalten. Wird ihre Verbindung bei *o* gelöst und sie nach *cr* hin zurückgeschlagen, so lässt sich auch der Viertelkreis *ts* nach *tr* hin zurücklegen. Man hat auch ähnliche Werkzeuge, bei welchen die beiden Lineale und die sie verbindende Axe von dem Halbkreise zum Behuf der Messung des Winkels abgenommen, mittelst einer Schraube bei der Messung festgestellt und sodann auf dem Halbkreise wieder befestigt werden können, um die Ablesung der Grade zu bewerkstelligen. Jedoch scheint jene erste Art bei weitem vorzüglicher; mit ihr können bei günstigen Umständen die Messungen bis auf $\frac{1}{4}$ Grad genau stattfinden, wenn einmal die nöthige Fertigkeit in der Handhabung derselben erworben worden ist.

Da es in den meisten Fällen darum zu thun ist, eine annähernde Bestimmung der Winkel zu erhalten, und diesem Zwecke durch das Anlege-Goniometer in hohem Grade entsprochen wird, [5] so wird dasselbe durch kein anderes Instrument ersetzt werden können und stets seinen bedeutenden Werth behalten. Zu möglichst genauen Winkelbestimmungen aber ist dasselbe nicht geeignet. Deshalb wurde von *Wollaston*

das nach ihm genannte *Reflexions-Goniometer* (goniomètre à reflexion) erfunden. Schon *Hauy* benutzte das Spiegeln der Krystallflächen, um die Neigung zweier solcher an einem Krystalle mit der bekannten Neigung zweier Flächen an einem andern durch das gleichzeitige Zurückwerfen der Lichtstrahlen von den einander annähernd parallel gestellten Flächen zu vergleichen.

Das Messen durch Zurückstrahlung des Lichtes von spiegelnden Krystallflächen beruht auf folgender Betrachtung. Es sei ld ein bestimmter Lichtstrahl, der auf eine spiegelnde Fig. 214. Fläche gb bei d auffällt und unter dem Winkel $adb = ldg$ nach a hin zurückgestrahlt wird, so dass die Ebene lda auf der Ebene gb senkrecht steht; bh sei eine zweite spiegelnde Ebene, die mit bg einen Winkel gbh macht, und die Durchschnittskante bei b sei senkrecht auf der Ebene lda. Errichtet man in dem Punkte d eine auf die Ebene gb senkrechte Linie ec, halbirt man den Winkel gbh durch eine Linie bc und fällt von c aus eine Senkrechte cf auf die Ebene bh, so ist wegen Gleichheit der Dreiecke bdc und bfc die Linie $cf =$ der Linie cd und der Winkel dcf ist die Ergänzung von dbf oder gbh zu 180°, weil das Viereck $dbfc$ bei d und f zwei rechte Winkel hat. Denkt man sich nun in dem Punkte c eine auf die Ebene der Gesammtfigur senkrechte Axe, welche der Durchschnittskante der beiden Flächen gb und bh parallel ist, und dreht man um diese den Körper, an welchem die beiden spiegelnden Flächen gb und bh vorkommen, so dass die Linie cf in der Ebene dcf sich bewegend an die Stelle von cd kommt, während zugleich die auf cf senkrechte bh diejenige Stelle einnimmt, die vorher von gb eingenommen wurde, so muss wieder der nämliche Lichtstrahl ld in derselben Linie da wie früher in das Auge bei a zurückgeworfen werden. Wird also der Winkel dcf gemessen, so wird dadurch der gesuchte Neigungswinkel gbh gefunden, denn er ist $= 180° - dcf$.

Es kommt also darauf an, irgend ein zu genauer Winkelmessung taugliches Instrument mit einer Vorrichtung zu verbinden, [6] mittelst welcher der Krystall gehalten und in verschiedene Stellungen gebracht werden kann, damit die Linie der zu messenden Kante senkrecht auf die Ebene des in Grade getheilten Kreises gerichtet sei, und wodurch wenigstens annähernd die Erzeugung einer solchen Stellung erhalten werde, in welcher die beiden Krystallflächen, wodurch die zu messende

Kante gebildet ist, sich in gleicher Entfernung von der ihnen parallelen Linie, welche in dem Mittelpunkte des eingetheilten Kreises senkrecht auf denselben gedacht wird, befinden, und endlich, wenn diese Stellung erreicht ist, Umdrehung um diese als Axe des Winkelmaasses dienende Linie stattfinden könne.

Das Wollaston'sche Goniometer besteht daher aus einem Fig. 215. Gestelle, welches zwei Füsse *d* und *e* und einen an diesen befestigten Nonius *c* trägt, aus einem in Grade getheilten Ringe *ab*, befestigt an einer Nabe (d. h. röhrenförmigen Axe), in welcher ein kegelförmiger Stift *ff*, dessen Axe am Mittelpunkte des Gradkreises auf der Ebene desselben senkrecht steht, drehbar ist. Mit der Aussenfläche der Nabe ruht diese Vorrichtung in einer Hülse, die am oberen Ende des Gestelles angebracht ist. Die am Rande gekörnte Scheibe *k* ist an der Nabe fest, dreht diese und somit auch den Gradring, wobei zu gleicher Zeit auch jener kegelförmige Stift *ff* sich mit drehen muss. Die zweite an dem Rande gekörnte Scheibe *i* dient dazu, den Stift *ff* allein in umdrehende Bewegung zu versetzen, ohne dass der Gradring sich mit bewegt, welcher, um diesen Zweck zu erleichtern, oft noch bei *x* durch eine Feder, die am Gestelle befestigt ist, während sie zugleich einen Vorsprung der inneren Fläche des Ringes berührt, festgehalten wird. Der Stift *ff* trägt einen Bogen *fr*, welcher durch ein einfaches Gelenk mit einem zweiten Bogen *to* verbunden ist. Dieser trägt einen cylindrischen, in der Hülse *p* drehbaren und seiner Länge nach verschiebbaren Stift *oo*. An das obere Ende desselben wird bei *h* der Krystall mit Wachs befestigt, so dass die zu messende Kante annähernd dem Augenmaasse nach senkrecht auf der eingetheilten Kreisscheibe sich befindet, wie dieses die Figur zeigt. Das Instrument ist so gestellt, dass 2 Horizontallinien *w* und *v* an einem hinreichend entfernten Gegenstande mit der Axe *ff* desselben parallel sind. Durch Drehung des Griffes *i* sucht man den Krystall abwechselnd in jene zwei Stellungen zu versetzen, in welchen die eine [7] oder die andere der Flächen der zu messenden Kante die obere Linie *w* so abspiegelt, dass ihr Bild mit der unteren direct gesehenen Linie *v* zusammenfällt. Das Auge muss dabei der Krystallfläche möglichst nahe sein. Das erwähnte Zusammenfallen wird nicht auf den ersten Versuch stattfinden, und man muss alsdann durch Anwendung der drehenden Bewegungen, welche der Stift *oo* in der Hülse *p* gestattet, und jener Bewegung, die das Gelenk bei *r* erlaubt,

dahin zu wirken suchen, nach und nach die Linie der zu messenden Kante möglichst vollkommen senkrecht auf die Ebene der Kreisscheibe zu stellen, indem alsdann auch beide Kantenflächen auf diese Ebene senkrecht sind.

Ob dieses vollkommen gelungen sei, erkennt man daran, dass durch blosse Umdrehung des Griffes *i* es möglich ist, abwechselnd auf der einen und der andern der Krystallflächen, welche die zu messende Kante bilden, die Linie *w* sich so abspiegeln zu lassen, dass das Auge ihr Bild mit der direct gesehenen Linie *v* genau zusammenfallend erblickt. Die Verschiebung des Stiftes *oo* in der Hülse *p* hat namentlich den Zweck, die Krystallkante der Verlängerung der geometrischen Axe von *ff* nähern zu können, damit in dem Viereck *dcfb* Fig. 214.
die Seiten *dc* und *cf* einander gleich gemacht werden. Man sucht daher gleich anfangs dahin zu wirken, dass die beiden Kantenflächen der geometrischen Umdrehungsaxe des Kegels *ff* Fig. 215.
sehr nahe liegen, ohne jedoch in sie zu fallen, und man hat dann nur eine kleine Verschiebung des Stiftes *oo* nöthig, um mit hinreichender Genauigkeit die Gleichheit der Entfernungen beider Kantenflächen von dieser Axe zu bewirken.

Ist nun auf solche Weise die richtige Stellung des Krystalls in Beziehung zu den Theilen des Krystallhalters durch vielfach wiederholte Versuche erreicht, so beginnt die eigentliche Messung. Der Gradring stehe auf 180°, der Griff *i* bringe den Krystall in die Stellung, in welcher diejenige der Krystallflächen, welche bei gleichmässiger Neigung der Kantenflächen gegen den Horizont, wenn diejenige Kante sich oben befindet, welche dem Beobachter (der das Instrument so vor sich stehen hat, wie es die Abbildung zeigt) nicht zugekehrt ist, die Linie *w* abspiegelt, so dass das erwähnte Zusammenfallen des Bildes derselben mit der Linie *v* statt hat. Mit dem Griffe *k* wird sodann [8] Umdrehung bewirkt, bis die andere Fläche dieselbe Lage hat, welche vorhin die erste einnahm. Der Gradkreis hat sich vorwärts bewegt und der Nonius zeigt nun auf einen Winkel, welcher um so viel kleiner ist als 180°, als derjenige Winkel beträgt, welcher die geschehene Umdrehung angeben würde. Der mittelst des Nonius abzulesende Winkel giebt dann also die Grösse der gesuchten Krystallkante unmittelbar an.

Will man dieses Instrument als Repetitions-Winkelmesser benutzen, so stellt man den Gradkreis auf 0°, bringt mit dem Griff *i* die dem Beobachter unter der oben angegebenen

Bedingung zugekehrte Kantenfläche in die erforderliche spiegelnde Lage, dreht dann den Griff *k* so, dass die andere Fläche an die Stelle der ersten versetzt wird, sodann den Griff *i*, um die erste Fläche wieder an jene Stelle zurückzubringen, dann den Griff *k* wieder vorwärts, um die zweite Fläche abermals an die Stelle der ersten in die gehörige Lage zu versetzen, u. s. f. abwechselnd, so dass jedesmal der Stand des Instruments vor jeder neuen Drehung abgelesen wird, damit etwaige zufällige Verrückungen des Krystalls dem Beobachter nicht entgehen und er überhaupt im Stande sei, wenn er über 180° oder über 360° ein- oder mehrmals hinaus misst, die richtige Summe von Graden der wahren Umdrehung zu erhalten*).

Man nimmt hierdurch also eine Anzahl von Messungen einer und derselben Kante vor, für welche man als Summe eine Mittelgrösse erhält, die mit der Anzahl der Beobachtungen dividirt ein Resultat liefert, welches mit dem wahren Werthe der gemessenen Kante um so näher übereinstimmen wird, je grösser die Anzahl der möglichst sorgfältig angestellten Beobachtungen ist, indem hierdurch die etwa vorgekommenen kleinen Fehler sich gegenseitig aufheben. Bei einiger Uebung in dieser Art von Messung mit einem gut gearbeiteten Goniometer und bei einer zweckmässigen Wahl der beiden Parallellinien, von denen [9] die eine die gespiegelt werdende und die andere die bei der Beobachtung direct gesehene ist (besonders hinsichtlich des Grades der Erleuchtung, die für die obere stärker als für die untere sein muss)**), kann man es

---

*) Auch kann man den Stand des Instruments vor jeder neuen Messung um etwa 10 Grade vorwärts verrücken und so nach und nach $\frac{360}{10}$ oder 36 Messungen einer und derselben Kante vornehmen, deren jede gleichsam einem neuen Nullpunkte des Instruments entspricht.

**) Man wählt deshalb am besten einen Querstab an einem Fenster des Zimmers, in welchem die Messung vorgenommen wird, oder vielmehr die Grenze zwischen ihm und der Glasscheibe als gerade horizontale Linie, die von der Krystallfläche gespiegelt werden soll, und eine unter demselben Fenster an der Wand damit parallel gezogene Linie von der erforderlichen Stärke, dass sie mit freiem Auge auf 8 bis 10 Fuss Entfernung *deutlich* gesehen werden kann (am besten eine schwarze Linie auf weissem Grunde), und von einer Länge, die 4 und mehr Fuss beträgt, welche dient, um direct gesehen zu werden. Wegen der besseren Beleuchtung dieser unteren Linie sind die Messungen wo möglich in einem Eckzimmer vorzunehmen, das von zwei Seiten Licht erhält.

dahin bringen, dass die einzelnen Beobachtungen von einem solchen Mittel aus vielen Messungen um nur 4 bis 5 Minuten verschieden sind*).

[10] Der grösste Grad von Genauigkeit wird nur dann erreicht, wenn alle Beobachtungsregeln gehörig befolgt sind,

---

*) Von der Richtigkeit des Grades der Beleuchtung und von der hierdurch bedingten Schärfe der Beobachtung über das genaue Zusammenfallen der Bilder hängt die Richtigkeit einer Messung in weit höherem Grade ab, als von der grösseren Entfernung der zum Visiren dienenden Bilder. Namentlich muss hinsichtlich des unteren Gegenstandes alles, was Blendung des Auges verursachen kann, möglichst sorgfältig vermieden werden. Man muss zu bewirken suchen, dass das von der Krystallfläche gespiegelte und das direct gesehene Bild in gleichem Grade dem Auge deutlich erscheine; dass aber die grössere Entfernung der beiden Visirlinien *w* und *v* von geringerem Einflusse ist, als man denken sollte, ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

Ein Strich von etwa 1 Linie Breite ist auf eine Entfernung von 8—10 Fuss noch deutlich erkennbar, und wenn also die Grenze des gespiegelten Bildes von *w* einigermaassen deutlich ist, so wird nicht leicht ein Fehler von $\frac{1}{12}$ Zoll an der wirklichen Congruenz beider Bilder stattfinden dürfen, den man nicht beobachten sollte. Es ist aber $\frac{1}{144} : 8 = \frac{1}{1152} <$ Tang. 3′, indem Tang. 3′ ungefähr $= \frac{1}{1146}$ ist. Wenn nun ein Lichtstrahl lc von unveränderlicher Lage auf eine spiegelnde Fläche sp so einfällt, dass er mit ihr einen Neigungswinkel $lcs = a + b$ macht, so ist der Winkel lcv, den die Verlängerung cv des zurückgeworfenen Strahles co mit dem eingefallenen Lichtstrahle lc bildet, $= 2a + 2b$. Tritt an die Stelle des Spiegels sp ein anderer $s'p'$, der nicht ganz mit der Lage, die jener vorher einnahm, zusammenfällt, sondern bloss einen Winkel $= b$ mit dem einfallenden Lichtstrahle lc bildet, so wird auch hier der Winkel [10] lcv' zwischen der Verlängerung cv' des zurückgeworfenen Lichtstrahls co' und zwischen dem einfallenden Lichtstrahle $cl = 2b$ sein, folglich der Winkel lcv' von dem Winkel lcv um $2a$ verschieden sein. Stellt daher a den Fehler vor, den die 2te Krystallfläche macht, wenn sie nicht genau mit der Stelle zusammenfällt, welche vorher die erste einnahm, so ist einleuchtend, dass dieser Fehler als verdoppelt sich zu erkennen geben wird. Setzt man daher $2a = 3$ Minuten, so ist die Grösse dieses Fehlers $a = 1{,}5$ Minuten, der, wie leicht einzusehen, nicht leicht stattfinden kann. Dagegen kommt es weit mehr auf genaues Zusammenfallen der beiden Bilder an, dessen Beobachtung dadurch, dass bei grösserer Entfernung die Ränder des gespiegelten Bildes sich gleichsam verwischen, schwierig wird, indem bei vielen Krystallen ein noch ziemlich deutliches Bild z. B. von einer Fenstersprosse bei 6—8 Fuss Entfernung gesehen wird, das bei 12—16 Fuss Entfernung bereits ganz unsichtbar ist, indem die Stärke des Lichtes, also die Schärfe des Bildes, abnimmt im Verhältniss des Quadrates der Entfernungen.

Fig. 216. Fig. 217.

I. Von den Flächen und den ebenen Strahlensystemen.

Jede Fläche, abgesehen von etwaiger Begrenzung derselben, theilt den unbegrenzten Raum in wenigstens zwei Stücke, ist also Grenze für jedes dieser Raumstücke.

Die Art und Weise, wie sie Grenze für *eins* von zwei durch sie getrennten Raumstücken ist, heisst ihre eine *Flächenseite* (*superficies plani*). Jede Fläche hat also (ohne Rücksicht auf ihre Begrenzung) zwei Flächenseiten. Bei einem Kugelflächenstück z. B. ist die eine Flächenseite hohl, die andere erhaben, bei der Ebene sind beide Flächenseiten von gleicher Beschaffenheit, d. h. eben*).

[13] Jede Flächenseite einer ganz oder theilweise durch Linien begrenzten Fläche, gewöhnlich einer Ebene, heisse ein *Bild* (*figura*). Das Bild, welches die eine Flächenseite einer begrenzten *Ebene* darbietet, heisse in Beziehung zu dem, welches die andere Flächenseite zeigt, das *Gegenbild* von diesem und umgekehrt dieses das Gegenbild von jenem.

Wenn man von allen Winkelpunkten eines Bildes senkrechte Linien zieht nach einer in derselben Ebene liegenden geraden Linie, diese Senkrechten über die erwähnte Linie hinaus verlängert, jedesmal die Verlängerung gleich dem Verlängerten macht und die Endpunkte der Verlängerungen zweckmässig durch Linien verbindet, so entsteht ein neues Bild, das mit dem Gegenbilde des gegebenen übereinstimmt. Zwei Gegenbilder, die in einer solchen Stellung mit einander verbunden gedacht werden, heissen *Nebengegenbilder*. Das Dreieck $a'b'c'$ ist ein Nebengegenbild vom Dreiecke abc und umgekehrt. (Fig. 218.)

(Fig. 219.) Wenn von zwei Bildern a und b das eine a an die Stelle des andern b gesetzt werden kann, so dass kein Unterschied vorhanden ist, so sagt man, das eine a sei das *Ebenbild* des andern b, sei dem andern *ebenbildlich gleich* oder congruent, verhalte sich zu dem andern ebenbildlich u. s. w. Das Zeichen für das Ebenbildlichsein ist $\cong$, z. B. $a \cong b$. Ist dagegen das eine Bild a gleich dem Gegenbilde des andern b, (Fig. 220.)

*) Das Unterscheiden der beiden Flächenseiten einer Fläche ist besonders wichtig in der Körperlehre, denn wenn man von de[r] Oberfläche eines Körpers spricht, so versteht man darunter seh[r] oft nur die äussere Flächenseite dieser Oberfläche, weil sie es ist die den Sinnen bei der Betrachtung zunächst sich darbietet.

so sagt man, die beiden Bilder a und b verhalten sich *gegenbildlich*, seien gegenbildlich gleich, seien Gegenbilder; das Zeichen des Gegenbildlichseins ist $|{=}|$, z. B. $a \;|{=}|\; b$ oder das Fig. 218.
Dreieck $abc \;|{=}|\; a'b'c'$. Es seien a, b, c, d vier Bilder und $a \;|{=}|\; b$ und $b \;|{=}|\; c$ und $c \;|{=}|\; d$, so ist auch $a \cong c$ und $b \cong d$ und $a \;|{=}|\; d$.

Wenn ein Bild durch eine gerade Linie so in zwei Theile zerlegt werden kann, dass sich diese beiden Theile gegenbildlich zu einander verhalten, so müssen auch die Gegenbilder der beiden Hälften sich zu einander gegenbildlich verhalten. Ist nun auch die Verbindungsart der beiden Theile des Bildes so, dass dieselben sich zu einander als Nebengegenbilder verhalten, [14] so wird dieses auch auf der andern Flächenseite des Gesammtbildes auf dieselbe Weise der Fall sein, und es ist dann das Gesammtbild seinem Gegenbilde ebenbildlich. Das Gesammtbild ae wird durch die Linie bd in zwei Hälften Fig. 221.
getheilt, die sich zu einander $|{=}|$ verhalten. Die Gegenbilder beider Hälften verhalten sich gleichfalls zu einander $|{=}|$, aber die Verbindung beider Hälften ist nicht so, dass x ein Nebengegenbild von y ist. Das Gesammtbild abd dagegen wird Fig. 222.
durch die Linie bc in zwei Hälften getheilt, so dass x das Nebengegenbild von y ist. Das Gegenbild von x, es heisse x', muss daher auch zu dem Gegenbilde von y, das durch y' bezeichnet werden möge, sich als Nebengegenbild verhalten. Hier ist also:

$$x \;|{=}|\; y$$
$$y' \;|{=}|\; y$$

folglich $$x \cong y'.$$

Ebenso ist $$y \;|{=}|\; x$$
$$x' \;|{=}|\; x$$

folglich $$y \cong x',$$

und endlich x und y zusammengenommen $\cong$ mit y' und x' zusammengenommen.

Umgekehrt, wenn ein ebenes Bild seinem Gegenbilde ebenbildlich ist, so giebt es auch wenigstens eine gerade Linie, welche dasselbe in zwei Hälften theilt, die sich wie Nebengegenbilder verhalten. Es sei $ABED$ irgend ein beliebiges Fig. 223.
Bild, das seinem Gegenbilde ebenbildlich sein soll. Beschreibe ein Nebengegenbild desselben $abed$, ziehe im gegebenen Bilde irgend eine gerade Linie und die dieser entsprechende Linie

im Nebengegenbilde, lege das Nebengegenbild so auf das gegebene Bild, dass beide sich decken, so sind nun folgende Fälle möglich:

1) Die gezogene Hülfslinie im Gegenbilde fällt zusammen mit jener ihr entsprechenden im gegebenen Bilde, und zwar:

a) so, dass die gleichnamigen Enden beider auf einander fallen, wie z. B. die Linie MN mit der Linie mn so zusammenfällt, dass M und m, N und n sich decken*); es werden dann $m\ldots b\ldots n$ und $M\ldots D\ldots N$, $m\ldots d\ldots n$ und $M\ldots B\ldots N$ sich decken. Es ist also:

[15] $$m\ldots b\ldots n \cong M\ldots D\ldots N$$

aber $$\frac{m\ldots b\ldots n \mid=\mid M\ldots B\ldots N}{M\ldots D\ldots N \mid=\mid M\ldots B\ldots N.}$$

Zieht man eine beliebige, durch irgend einen Punkt R in MN auf MN senkrechte Linie PQ, so wird die entsprechende Linie pq im Gegenbilde gleichfalls senkrecht auf mn sein müssen, und da $mr = MR$ und der Winkel $mrq = MRP = 90^\circ$, so werden auch bei dem oben erwähnten Aufeinanderliegen beider Bilder die Punkte q und P, p und Q sich decken. Es ist also:

$$q \cong P$$

aber $$\frac{q \mid=\mid Q}{P \mid=\mid Q,}$$

und ebenso

$$PR \mid=\mid QR.$$

Da nun dasselbe gilt für jede mit PQ parallele Linie, so ist $M\ldots D\ldots N$ das Nebengegenbild von $M\ldots B\ldots N$ und MN die Linie selbst, welche die Theilung in zwei Nebengegenbilder bewirkt;

b) so, dass die ungleichnamigen Enden beider auf einander liegen, wie z. B. die Linie PQ mit der Linie qp so zusammenfallen würde, dass P und q, Q und p sich decken.

*) Dieses ist für zwei Bilder bloss auf einerlei Weise möglich, während bei zwei Ebenen es auf zweifache Weise denkbar ist, nämlich einmal so, dass das Bild $ABED$ von dem Bilde $abed$ gedeckt wird, während es das anderemal von dem Gegenbilde von $abed$ gedeckt wird.

Der Halbirungspunkt R der Linie PQ ist dann der einzige Punkt dieser Linie, welcher mit dem ihm *gleichnamigen* Punkte r in der gegenbildlichen Linie pq zusammenfällt*). Ziehe die MN durch den Punkt R senkrecht auf PQ und im Nebengegenbilde durch r die mn senkrecht auf pq, so wird bei dem Sichdecken beider Figuren wegen des Zusammenfallens von PR mit qr und R mit r und wegen der rechten Winkel bei R und r die Linie mn mit MN zusammenfallen müssen, und zwar so, dass der in qap liegende Punkt m mit dem in PAQ liegenden Punkte M, [16] mithin n mit N zusammenfällt, folglich, gemäss dem Falle a), die Linie MN eine solche ist, die das Bild $ABED$ in zwei nebengegenbildliche Hälften theilt.

2) Die gezogene Hülfslinie im Gegenbilde fällt nicht zusammen mit der ihr entsprechenden Linie im gegebenen Bilde, sondern

a) sie schneidet sie so, dass also in jedem der beiden Bilder zwei derartige Linien vorhanden angenommen werden können, die vier Winkel um einen Scheitel bilden. TV sei eine solche Linie und $T'V'$ die andere, welche mit der nebengegenbildlichen Linie jener, nämlich mit tv zusammenfällt, wenn beide Bilder sich decken. Die entstehenden Durchschnittspunkte R und r decken sich, wenn beide Bilder auf einander liegen, und es ist Fig. 224.

$$tr \cong T'R$$

aber

$$\frac{tr \;|{=}|\; TR}{T'R \;|{=}|\; TR.}$$

Halbirt man den Winkel TRT' durch eine Linie RN oder MN, so ist MN eine solche Linie, die $\cong$ ihrer gegenbildlichen Linie mn ist (weil es für einen bestimmten Winkel

*) Dieses ist für *zwei Bilder* bloss auf einerlei Weise, nämlich so möglich, dass $q \ldots a \ldots p$ mit $P \ldots A \ldots Q$ zusammenfällt u. s. w.; denn der 2te Fall (welcher bei Vergleichung zweier *begrenzten Ebenen* möglich wäre), gemäss welchem $q \ldots a \ldots p$ und $P \ldots E \ldots Q$ sich decken würden, fordert, dass für eines der beiden genannten Flächenstücke $q \ldots a \ldots p$ oder $P \ldots E \ldots Q$, z. B. für $q \ldots a \ldots p$, mithin für die ganze Fläche $a \ldots b \ldots e \ldots d$, von welcher es einen Theil ausmacht, Umkehrung, d. h. Vertauschung der beiden Flächenseiten stattfände, wodurch also das Gegenbild von $a \ldots b \ldots e \ldots d$ (mithin das Ebenbild von $A \ldots B \ldots E \ldots D$) und nicht $a \ldots b \ldots e \ldots d$ selbst mit $A \ldots B \ldots E \ldots D$ verglichen werden würde.

nur eine einzige Linie giebt, die ihn halbirt), auch muss der Punkt N, welcher innerhalb der Schenkel des Winkels TRT' liegt, bei dem Aufeinanderliegen beider Figuren zusammenfallen mit dem Punkte n, welcher im Nebengegenbilde dieselbe Bedeutung hat. Die Linie MN hat mithin die Eigenschaft wie im Falle 1) a), bewirkt also auch die fragliche Theilung der Figur $ABED$ in zwei Nebengegenbilder; oder

b) sie ist ihr parallel. Es ist dieses der Fall a), wenn man den Winkel TRT' immer kleiner werdend denkt, so dass zuletzt beim Parallelsein von TV mit $T'V'$ er $= 0$ wird. Eine zwischen diesen beiden parallelen Linien in gleichem Abstande von beiden und mit ihnen parallel hinlaufende Linie ist dann diejenige, welche die Theilung des Bildes in zwei nebengegenbildliche Hälften bewirkt.

Jedes Bild ist nun entweder seinem Gegenbilde eben-
Fig. 225. *bildlich oder nicht.* Wenn ein Bild a einem andern b ebenbildlich und auch dem Gegenbilde von b ebenbildlich ist, so ist es dem b *ebenbildlich und gegenbildlich zugleich*, ist das *ebenbildliche Gegenbild* von b. Dieses setzt voraus, dass jedes der beiden Bilder a und b seinem Gegenbilde ebenbildlich d. h. congruent [17] sei. Zeichen für das Ebenbildlichgegenbildlichsein ist $|\cong|$, z. B. $a \, |\cong| \, b$.

Für 2 einander gleiche Bilder oder Theile von Bildern giebt es demnach folgende Arten des Gleichseins oder Gleichwerthigseins hinsichtlich auf Form:

1) die beiden Bilder sind einander ebenbildlich und gegenbildlich zugleich, z. B. $a \, |\cong| \, b$,

2) nicht, dann sind sie einander entweder

Fig. 219. A. bloss ebenbildlich, z. B. $a \cong b$, oder

220. B. bloss gegenbildlich; so ist $a \, |=| \, b$ und das Dreieck
218. $abc \, |=|$ dem Dreiecke $a'b'c'$.

Nähere Untersuchungen der Eigenschaften einer Fläche müssen nun auch zur Vergleichung der Theile derselben unter einander führen, wobei zu achten ist auf die Menge von Theilen, die als gleichwerthige sich erkennen lassen, und auf die Art dieser Gleichwerthigkeit. Theile einer ebenen Figur können aber einander gleichwerthig sein in Beziehung auf ihr Verhalten zu irgend einem gegebenen Punkte innerhalb der Fläche, oder abgesehen hiervon, d. h. als Theile der Figur an sich. Denkt man sich irgend eine gegebene Figur und einen in ihr gegebenen bestimmten Punkt c und errichtet aus ihm eine Linie senkrecht zur ebenen Figur, ohne sie über den Punkt c hinaus zu ver-

längern, so dass sie also bloss auf der einen Flächenseite der Ebene aufsteht, und nennt diese Linie die Normale für den Punkt *c*, so kann man sich auch noch eine 2te solche Figur denken, die nebst der dazu gehörigen Normale so beschaffen ist, dass, wenn beide Normalen und beide Ebenen zusammenfallen, auch eine Stellung, welche dieser Bedingung entspricht, für die 2te Figur möglich ist, in welcher sie die gegebene deckt. Diese 2te Figur mit ihrer Normale kann gebraucht werden, um mittelst ihrer die Theile der gegebenen Figur in Beziehung auf das Gleichartige ihres Herumliegens um den gegebenen Punkt zu untersuchen, und heisst darum *Vergleichungsfigur* der gegebenen. Die Vergleichung geschieht dadurch, dass man die mit der Vergleichungsfigur sich deckende gegebene Figur um die gemeinschaftliche ruhig bleibende Normale so dreht, wie ein Rad um seine Axe, während die Vergleichungsfigur ihre Stellung unverändert behält, d. h. unbewegt bleibt. Es wird dann während der ganzen Umdrehung die Ebene, in welcher die gegebene Figur liegt, stets zusammenfallend bleiben mit der Ebene, [18] in welcher die Vergleichungsfigur liegt. Man achtet dann auf die Anzahl der unter den angeführten Bedingungen möglichen Stellungen der gegebenen Figur, *in denen sie die ruhig bleibende Vergleichungsfigur deckt* (mit der Vergleichungsfigur sich in identischer oder ebenbildlicher Stellung befindet), wobei die nach jeder *ganzen* Umdrehung eintretende Stellung, als mit der ursprünglichen Stellung vollkommen übereinstimmend, nicht als eine besondere Stellung betrachtet wird, so dass beide nur für *eine* Stellung gezählt werden. Das hierdurch erhaltene Resultat heisst dann, allgemein ausgedrückt: *jedes gegebene Bild habe, in Beziehung zu der gegebenen Normale, p identische Stellungen einer bestimmten Art*, wo *p* eine ganze Zahl bedeutet. Da die ursprüngliche Stellung an sich willkürlich ist, so ist bei einem derartigen Bilde, in Beziehung auf die bestimmte Normale, die Anzahl identischer Stellungen von jeder Art $= p$. Man sagt auch, das Bild habe, in Beziehung auf die Normale, *p* identische Stellungen jeder Art. So hat z. B. ein Bild des gleichseitigen Dreiecks in Beziehung auf die in seinem Mittelpunkte aufstehende Normale 3, ein solches des Rhomboids, in Beziehung auf die in seinem Mittelpunkte aufstehende Normale, 2 ebenbildliche Stellungen jeder Art.

Wenn zwei Punkte oder Theile *A* und *B* eines ebenen Bildes hinsichtlich auf ihr Verhalten zu einem in diesem Bilde

liegenden gegebenen Punkte C und zum Bilde selbst, in welchem sie liegen, so mit einander übereinstimmen, dass der eine A in einer Stellung des Bildes, welche durch Umdrehung um die Normale des Punktes C erhalten wurde, an dem Orte sich befindet, den in der ursprünglichen Stellung der Punkt oder Theil B einnahm, während zugleich diese neue Stellung des Bildes eine der ursprünglich gegebenen *ebenbildliche* Stellung ist, so sagt man, die beiden Punkte oder Theile A und B seien *einander ebenbildlich hinsichtlich auf ihr Verhalten zu dem Punkte* C, seien durch Umdrehung des Bildes um den Punkt C mit einander vertauschbar.

Jede ebene Figur hat unendlich viele Normalen, in Beziehung zu welchen es für sie zu jeder bestimmten Stellung keine andere ebenbildliche giebt. Wenn eine ebene Figur eine Normale hat, in Beziehung zu welcher sie 2 oder mehrere ebenbildliche Stellungen jeder Art gestattet, so hat sie keine andere Normale ausser dieser, in Beziehung zu welcher sie gleichfalls [**19**] zwei oder mehrere ebenbildliche Stellungen gestattet. Die Figur hat dann einen *einzigen bestimmten Mittelpunkt*, und die Normale, welche in diesem Mittelpunkte aufsteht, ist die einzige, in Beziehung auf welche dem Bilde zwei oder mehr ebenbildliche Stellungen jeder Art eigen sind.

Wenn 2 Punkte oder Theile A und B eines ebenen Bildes einander ebenbildlich sind, hinsichtlich auf ihr Verhalten zu irgend einem Punkte C in diesem Bilde, der nicht Mittelpunkt der Figur ist, so sind sie auch einander ebenbildlich hinsichtlich auf ihr Verhalten zum Mittelpunkte, d. h. sie sind als Theile der Figur selbst einander ebenbildlich. Von einem Bilde, welches, in Beziehung zu der in seinem Mittelpunkte aufstehenden Normale, p ebenbildliche Stellungen jeder Art hat, sagt man, es entspreche einem *$p$gliedrigen ebenen Strahlensysteme*, sei eine *$p$gliedrige ebene Figur*, ein $p$gliedriges ebenes Bild; denn die Anzahl der in einem solchen Bilde denkbaren ebenbildlichen, vom Mittelpunkte ausgehenden Strah-
Fig. len jeder Art ist $= p$. So ist in den Abbildungen jede der
227. 230. Figuren a, b, c und a, b, c, d, e eine 2gliedrige ebene Figur
231 u. 228. (*figura binoradiata*); jede der Figuren a, b, c und a, b, c
229 u. eine 3gliedrige (*figura ternoradiata*); jede von den Figuren
232. a und b und a, b, c eine 4gliedrige (*figura quaternoradiata*)
u. s. w. Für $p = 1$ entsteht die 1gliedrige ebene Figur
(*figura singuloradiata*); hierher gehören z. B. die Figuren
226. 235. a, b, c, d und a, b, c, d u. s. w.

Ein $p$gliedriges Bild hat sonach p ebenbildliche Theile jeder Art.

Eine zweite Art der Vergleichung der Theile eines ebenen Bildes hinsichtlich ihres Verhaltens zu einem in diesem Bilde gegebenen Punkte hat den Zweck zu untersuchen, ob nicht Theile vorhanden sind, die in der genannten Beziehung sich zu den der Vergleichung unterworfenen Theilen *gegenbildlich* verhalten. Sie geschieht dadurch, dass man als Hülfsfigur oder Vergleichungsfigur das Gegenbild der gegebenen Figur sich denkt mit der entsprechenden Normale und dass man sodann diese Hülfsfigur nebst ihrer Normale so stellt, dass die Normale der gegebenen Figur mit der Normale der Hülfsfigur zusammenfällt und zu gleicher Zeit die Ebene, in welcher die gegebene Figur liegt, mit der, in welcher die Hülfsfigur liegt, zusammenfällt, und sodann, wenn es nöthig ist, durch Drehung der gegebenen Figur um die gemeinschaftliche Normale erforscht, ob unter den [20] nunmehr stattfindenden Bedingungen eine Stellung der gegebenen Figur möglich ist, in welcher sie mit dieser unbeweglich gebliebenen Hülfsfigur ebenbildlich erscheint. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn das gegebene Bild seinem Gegenbilde $\cong$ ist.

Wenn von 2 Theilen A und B einer gegebenen Figur der eine A bei dieser Vergleichungsart zusammenfällt mit dem Theile B' der Vergleichungsfigur, welcher zu dem Theile B der gegebenen Figur sich gegenbildlich verhält, so müssen auch A und B in der gegebenen Figur einander gegenbildlich sein hinsichtlich auf ihr Verhalten zu dem Punkte, in welchem die gegebene Normale aufsteht.

Wenn 2 Punkte oder Theile A und B eines ebenen Bildes einander gegenbildlich sind in Beziehung auf ihr Verhalten zu einem in diesem Bilde liegenden gegebenen Punkte C, so müssen sie auch einander gegenbildlich sein in Beziehung auf ihr Verhalten zum Mittelpunkte der Figur, d. h. als Theile der Figur selbst einander gegenbildlich sein. Die Theile qor, uop, sot des Bildes c sind $\cong$. Jeder aber verhält sich $|=|$ zu jedem der Theile sor, uot und qop, die unter sich wieder $\cong$ sind. Da es nun einleuchtend ist, dass von jeder $p$gliedrigen Figur auch das Gegenbild eine $p$gliedrige Figur sein muss, so ist auch ersichtlich, dass eine Figur, welche nebst der Normale eines bestimmten Punktes c derselben ihrem Gegenbilde hinsichtlich auf ihr Verhalten zu der Normale desselben Punktes c' $\cong$ ist, angesehen werden könne, als seien in ihr Fig. 231.

gleichsam 2 einzelne *p* gliedrige Strahlensysteme vereinigt, von denen das eine sich zum andern gegenbildlich verhält, und dass man daher eine solche Figur eine 2 *fach pgliedrige*
Fig. 30. nennen könne. So ist z. B. jedes der Bilder *a*, *b*, *c*, *d*, *e* ein 2 fach 2 gliedriges (*figura dupliciter binoradiata*); jede der
31. Figuren *a*, *b*, *c* eine 2 fach 3 gliedrige (*figura dupliciter terno-*
32. *radiata*); jede der Figuren *a*, *b*, *c* ist eine 2 fach 4 gliedrige (*figura dupliciter quaternoradiata*). Die Bilder aber, welche
27. durch *a*, *b*, *c* dargestellt sind, sind 1 fach 2 gliedrige (*figura*
28. *simpliciter binoradiata*); die Bilder *b* und *c* sind 1 fach 3 gliedrige (*figura simpliciter ternoradiata*) und so weiter.

Auch bei der 2 fach *p* gliedrigen Figur ist für $p = 2$ oder grösser der Punkt *c*, in welchem die berücksichtigte Normale aufsteht, der Mittelpunkt derselben. In jeder 2 fach
Fig. 31. 3 gliedrigen Figur z. B., wie *a* oder *c*, sind vom Mittelpunkte ausgehend [21] möglich: 3 Strahlen *op*, *or* und *ot* von einerlei Art, die sich (in Beziehung auf die Art ihrer Lage in der Gesammtfigur) $|\cong|$ verhalten, und 3 andere Strahlen *oq*, *ou* und *os* einer 2 ten Art, die ebenfalls einander $|\cong|$ zugleich sind. Jeder Strahl, der zwischen *op* und *oq* liegt, ist $\cong$ mit einem solchen zwischen *or* und *os* und einem 3 ten zwischen *ot* und *ou*, aber $|=|$ mit einem ihm sonst gleichwerthigen zwischen *or* und *oq*, sowie einem solchen zwischen *ot* und *os* und wieder zwischen *op* und *ou*.

Nennt man die ebenbildlich und gegenbildlich zugleich sich verhaltenden Strahlen 2 *seitige* oder *doppelte* Strahlen (*radii duplices*), während man die übrigen bloss einfache Strahlen (*radii simplices*) nennt, so kann man sagen: in jeder 2 fach *p* gliedrigen ebenen Figur können gedacht werden *p* doppelte Strahlen einer ersten und *p* doppelte Strahlen einer zweiten Art, während die Anzahl von einfachen Strahlen jeder Art $= 2p$ ist, wovon jedoch die *p* einen unter sich ebenbildlichen zu den *p* andern unter sich ebenbildlichen sich gegenbildlich verhalten. Es werden hier sonach 2 Strahlen (Punkte, Theile u. s. w.) einer ebenen Figur als gleichwerthig betrachtet, sowohl wenn sie bloss gegenbildlich sind, als auch, wenn sie bloss ebenbildlich sind. Jede 2 fach *p* gliedrige Figur kann als eine *p* gliedrige betrachtet werden, nicht aber ist jede *p*-gliedrige Figur eine 2 fach *p* gliedrige. Die *p* gliedrigen Bilder*) sind demnach entweder

*) Die Figur 233*a* stellt ein 2 fach 3 gliedriges, die Figur 233*b*

a) *2fach pgliedrig*, wenn ein solches Bild mit seinem Gegenbilde vertauscht, d. h. in identische Stellung gebracht werden kann, oder

b) *1fach pgliedrig*, wenn Vertauschung eines $p$gliedrigen Bildes in diesem Sinne nicht möglich ist.

[22] Es werden hier sonach sowohl 2 Strahlen (Punkte, Theile u. s. w.) einer ebenen Figur, die für einerlei Flächenseite links und rechts sich verhalten, als auch solche, die identisch sind, als *gleichwerthig* betrachtet, wenn man eine 2fach $p$gliedrige Figur als eine 2fach $p$gliedrige ansieht, während bloss Theile, die für einerlei Flächenseite identisch sind, als *gleichwerthig* betrachtet werden, wenn man sagt, die 2fach $p$gliedrige Figur sei eine $p$gliedrige.

Die Anzahl der denkbaren Arten von einfachen Strahlen in einer 2fach $p$gliedrigen ebenen Figur ist unendlich, was hier so viel sagen will als gleich der Menge von Strahlen, die innerhalb der Schenkel eines Winkels von $\frac{360}{2 \cdot p}$ Graden vom Scheitel ausgehend gedacht werden können, die beiden Schenkel selbst nicht mitgezählt, während bei der 1fach $p$gliedrigen ebenen Figur die Anzahl der denkbaren Arten von Strahlen gleich der Menge von Strahlen ist, die innerhalb der Schenkel eines Winkels von $\frac{360}{p}$ Graden vom Scheitel ausgehend gedacht werden können, den einen der Schenkel selbst mitgezählt, indem dort alle Strahlen einfache sind.

Was von den 2fach $p$gliedrigen Figuren im Allgemeinen für ihren bestimmten Mittelpunkt gilt, das gilt bei dem Werthe von $p = 1$ von den 2fach 1gliedrigen Figuren für *jeden* Punkt in der *einen* Linie, durch welche sie in zwei sich gegenbildlich ebenbildlich verhaltende Hälften getheilt werden können. Der *Gleichwerthsmittelpunkt* einer 2fach 1gliedrigen Figur ist daher bloss in einer bestimmten Linie willkürlich annehmbar,

---

ein 2fach 4gliedriges Strahlensystem dar, ohne Verbindung mit einer bestimmten ebenen Figur. Die doppelten Strahlen der einen, z. B. ersten Art sind mit α, die der zweiten Art mit β bezeichnet; von den einfachen sind nur eine oder ein Paar Arten γ, δ, ε angegeben. Die zur Vergleichung dabei gezeichneten einfach $p$gliedrigen Strahlensysteme, das 1fach 3gliedrige Strahlensystem Fig. 234*a* und das einfach 4gliedrige Strahlensystem Fig. 234*b* enthalten bloss einfache Strahlen, von denen nur ein Paar Arten angegeben sind.

während der der 1fach 1gliedrigen ebenen Figur in der ganzen Erstreckung der Ebene, in der sie liegt, willkürlich angenommen werden kann. Fig. 235. Die Figuren a, b, c, d u. s. w. sind 2fach 1gliedrige Figuren (*figurae dupliciter singuloradiatae*), 226. während die Figuren a, b, c, d... 1fach 1gliedrige Figuren (*figurae simpliciter singuloradiatae*) sind.

[**23**] Es wäre durch das Vorhergehende dargethan:

1) dass jede gegebene oder denkbare Figur überhaupt eine $p$gliedrige Figur sein müsse, wenn p eine der ganzen Zahlen 1, 2, 3 ... ∞ bedeutet;

2) dass jede $p$gliedrige Figur entweder eine 2fach $p$gliedrige oder bloss eine 1fach $p$gliedrige sein könne; auch ist

3) ersichtlich, dass Figuren von gleich grosser Anzahl der Seiten sehr verschiedenen Strahlensystemen entsprechen, dass aber die Menge ebenbildlicher Seiten $= p$ und dass höchstens die Menge gleichwerthiger Seiten $= 2p$ sei, in welchem Falle dann die p einen unter sich ebenbildlichen zu den p andern unter sich ebenbildlichen sich gegenbildlich verhalten rücksichtlich aller der Eigenschaften, die ihnen als Seiten der Gesammtfigur zugeschrieben werden können.

Um die nähere Beschaffenheit einer untersuchten Figur bezeichnen zu können, setze man fest, dass, wenn man von einer Menge von 6 Dingen z. B. andeuten will, dass die 3 einen unter sich und wieder die 3 andern unter sich mehr zusammengehörig sind, als eines von den ersten drei mit einem von den 2ten drei, während man doch die sämmtlichen 6 Dinge unter einem gemeinschaftlichen Namen vereinigen will, man sage, es seien 2×3 *Dinge* (zu lesen zwei mal drei Dinge), während, wenn alle 6 Dinge auf gleiche Weise zusammengehören, man den Ausdruck 6 *Dinge* unmittelbar gebraucht. Gleiches gelte von den beiden allgemeinen Ausdrücken $q \times r$ und qr, wovon der erstere $q \times r$ dem 2×3, der andere qr dem 6 entspricht; ebenso $2 \times p$ und $2p$ (zu lesen *zweimal p* der eine, *zwei p* der andere). Man wird dann auch eine Menge von Dingen, die aus drei Sechsheiten und aus zwei Dreiheiten*) besteht, bezeichnen durch den Aus-

*) Statt Binion, Ternion u. s. w. mögen die Ausdrücke Zweiheit, Dreiheit u. s. w. ähnlich Einheit, Vielheit gebraucht werden.

druck 3 × 6 *und* 2 × 3 *Dinge* u. s. w., allgemein $n \times t$ und $r \times p$ Dinge.

Es sei ferner $t = 2p$, so dass p irgend eine ganze Zahl bedeutet, n sei irgend eine beliebige ganze Zahl, so schreiten bei den 1 fach p gliedrigen Figuren die Ausdrücke für die Anzahl sämmtlicher Seiten fort nach dem Gesetze $1 \times p$, $2 \times p$, $3 \times p \ldots n \times p$. Es giebt daher 1 fach 1 gliedrige Figuren, welche 3 × 1 seitig sind, wie *a*, oder 4 × 1 seitig, wie *b*, Fig. 226.
5 × 1 seitig, wie *c*, [24] 6 × 1 seitig, wie *d* u. s. w.; 1 fach 227.
2 gliedrige Figuren, welche 2 × 2 seitig sind, wie *a*, *b*, 3 × 2 seitig wie *c* u. s. w. Die 1 fach 3 gliedrigen Figuren 228.
a, *b*, *c* sind 1 × 3 seitig die erste, 2 × 3 seitig die 2 te und 3 × 3 seitig die 3 te. Die 1 fach 4 gliedrigen Figuren sind 229.
1 × 4 seitige wie *a*, 2 × 4 seitige wie *b*, 3 × 4 seitige u. s. w. Bei den 2 fach p gliedrigen Figuren schreitet der Ausdruck für die Gesammtseiten-Anzahl fort nach dem Gesetze p, $2 \times p$, t, t und p, t und $2 \times p$, $2 \times t \ldots n \times t$, $n \times t$ und $1 \times p$, $n \times t$ und $2 \times p \ldots$ So ist *a* eine 2 × 2 seitige, *b* Fig. 230.
eine 4 seitige, *c* eine 4 und 2 seitige, *d* eine 4 und 2 × 2 seitige, *e* eine 2 × 4 seitige ... 2 fach 2 gliedrige Figur, ferner *a* eine 231.
3 seitige, *b* eine 2 × 3 seitige, *c* eine 6 seitige ... 2 fach 3 gliedrige Figur, und wieder *a* eine 4 seitige, *b* eine 2 × 4 seitige, 232.
c eine 8 seitige ... 2 fach 4 gliedrige Figur.

Es sei hier zu gleicher Zeit erlaubt, einige zweckmässige Benennungen einzuführen zur Bezeichnung von Figuren, welche für den vorliegenden Zweck vorzüglich wichtig sind. Die Ausdrücke Dreieck, Viereck, Fünfeck u. s. w. (*trigonoides*, Fig. 226.
tretagonoides, *pentagonoides*) mögen sowohl ein Dreieck, Viereck u. s. w. bezeichnen, von dem man im Namen keine *besondere Regelmässigkeit ausdrücken will*, als auch ein 1 fach 1 gliedriges 3 × 1 seit, 4 × 1 seit u. s. w., dem *keine höhere Regelmässigkeit zusteht*. Von den ihrer Form nach 2 fach 1 gliedrigen Figuren heisse die 2 und 1 seitige oder das Fig. 235.
gleichschenklige Dreieck *a Keilfläche* oder *Keil* (*sphenoides* oder *isosceloides*); die 2 × 2 seitige *c* heisse *Lanzenfläche* oder *Lanze* (*Doroides*); von den schwalbenschwanzartigen 2 fach 1 gliedrigen 4 Ecken *b* und 5 Ecken *d* mögen die letzteren mit dem Ausdrucke *Sterzenflächen* oder *Sterzen**)

---

*) Der Ausdruck Sterze bezieht sich vorzüglich auf solche Schwänze von Vögeln, bei denen ein Hervortreten dieses Körpertheils in jener geraden Richtung statt hat, durch welche derselbe

(*Uroides*) belegt werden, während die ersteren als *Spreizflächen* oder *Spreizen* nicht unpassend benannt werden dürften.

[25] II. Von den Axenarten überhaupt.

Wenn man sich einen gegebenen Körper in einer bestimmten gegebenen Stellung im Raume und einen ausserhalb des Körpers gegebenen Punkt (*Anfangspunkt*) denkt, dessen Entfernung von jedem Punkte des Körpers unveränderlich ist, so kann man von diesem Punkte aus gerade Linien nach jedem Eckpunkte des Körpers ziehen und über den Anfangspunkt hinaus rückwärts verlängern und die Verlängerung gleich machen der Linie, welche verlängert wurde. Die sonach diesseits und jenseits des Anfangspunktes in gleichem Abstande befindlichen Endpunkte einer und derselben solchen Linie nenne man *Gegenpunkte*. Durch die Gegenpunkte der Winkelpunkte einer jeden Begrenzungsebene lege man eine Ebene; sie ist die *Gegenfläche* der *ihr entsprechenden* Begrenzungsfläche des gegebenen Körpers. Der von der Gesammtheit der Gegenflächen der Begrenzungsflächen eines gegebenen Körpers eingeschlossene Raum heisst der *Gegenkörper* des gegebenen Körpers. Umgekehrt ist dieser der Gegenkörper von jenem.

---

auf ähnliche Weise in 2 nebengegenbildliche Hälften zertheilt ist, wie 2fach 1gliedrige Figuren überhaupt zertheilt werden können. Die Aehnlichkeit von Figur 235d, β mit den Schwalbensterzen und den Pflugsterzen bedarf wohl kaum noch hervorgehoben zu werden. Da die 2fach $p$gliedrige $t$seitige Figur 231c, so lange sie ringsum begrenzt ist, stets zusammengesetzt gedacht werden kann aus p einzelnen Lanzenflächen $rqos$, $puoq$, $tsou$, so hiesse eine solche Figur ein *Lanzen-p-ling*, z. B. [25] Lanzen-Drilling, Lanzen-Vierling (*ditrigonum, ditetragonum*), u. s. w. Die dem Lanzen-Zwilling entsprechende Figur ist die Raute, bei welcher jede der beiden Lanzen zu einem Keile geworden ist. Die von p ebenbildlichen Seiten begrenzte Figur, sie sei eine 1fach $p$gliedrige oder eine 2fach $p$gliedrige, heisse ein *p seit*, so also 3seit, 4seit, 5seit (*trigonum*, *tetragonum*, *pentagonum*) u. s. w., statt gleichseitiges, gleichwinkliges 3eck, 4eck, 5eck u. s. w. Das 2fach $p$gliedrige $p$seit kann sonach betrachtet werden als ein Lanzen-p-ling, in welchem das Verhältniss zwischen der Länge eines doppelten Querstrahls der ersten Art und eines solchen der 2ten Art $= \text{Cos.}\left(\frac{360^0}{2p}\right) : 1$, oder umgekehrt $= 1 : \text{Cos.}\left(\frac{360^0}{2p}\right)$ ist.

Alle Gegenkörper, die für einen und denselben gegebenen Körper entstehen, je nachdem man von einem andern Anfangspunkte ausgeht, sind unter sich, wenn sie in einerlei Stellung gebracht werden, congruent. Die äussere Flächenseite jeder einzelnen Begrenzungsebene eines [26] Körpers ist congruent der innern Flächenseite der ihr entsprechenden Begrenzungsebene seines Gegenkörpers, d. h. die äussern Flächenseiten von einander entsprechenden Flächen zweier Gegenkörper verhalten sich |=|*). Zwei sich wie Gegenkörper zu einander verhaltende Körper stimmen ausserdem überein rücksichtlich auf Grösse der sich entsprechenden Kanten und Winkel, sowie in Hinsicht auf Grösse des umschlossenen Raumes. Die Gegenecken zweier Gegenkörper verhalten sich wie zwei Ecken, von denen die eine bei Verlängerung der Ebenen und Kanten der andern über den Scheitel hinaus, als die von den Scheitelwinkeln dieser gebildete, entsteht.

Wenn ein Körper auf einer Ebene stehend gedacht wird in bestimmter Stellung und man fällt von allen seinen Eckpunkten senkrechte Linien auf diese Ebene und vereinigt die hierdurch in dieser Ebene bestimmten Punkte so mit einander, dass für jede Kante des Körpers eine ihr entsprechende Linie in der horizontalen Ebene entsteht, so hat man eine horizontale Projection des Körpers für die bestimmte Stellung. Verlängert man die aus den Ecken des Körpers auf die horizontale Ebene gefällten Perpendikel, so dass jede Verlängerung gleich lang gemacht wird mit der verlängerten Linie, so entstehen unterhalb der horizontalen Ebene Punkte, die als Eckpunkte eines neuen Körpers betrachtet werden können, an welchem jede Begrenzungsfigur das Gegenbild ist von der Figur, welcher sie im gegebenen Körper entspricht, so dass mithin dieser 2te Körper ein Gegenkörper des ersten ist. Man sieht daraus, dass das hier betrachtete Bild der horizontalen Projection des 2ten Körpers das Gegenbild ist von der Horizontalprojection des 1sten Körpers und dass man daher auch sagen kann, Gegenkörper oder gegenbildliche Körper seien

*) Könnte man die Gesammtoberfläche eines gegebenen Körpers umstülpen (wie man einen linken Handschuh umstülpt, um ihn rechts zu machen), so würde dieselbe nach dieser Veränderung einen Raum umschliessen, der dem des Gegenkörpers des gegebenen, wenn er mit ihm in einerlei Stellung gebracht wäre, jedenfalls congruent sein würde.

solche, die so beschaffen sind, dass die Bilder der einander entsprechenden Horizontalprojectionen beider sich als Gegenbilder verhalten. Zwei gegenbildlich sich verhaltende Körper, die in solcher Stellung mit einander verbunden gedacht werden, wie die hier betrachtete ist, heissen *auf einerlei Horizontalprojection* [27] *stehende*, oder *gleichstellige*, *gegenbildliche Körper*; ein Ausdruck, welcher für Körper das ist, was der Ausdruck nebengegenbildlich für ebene Figuren.

Wenn ein Körper und ein Anfangspunkt und eine durch diesen Anfangspunkt gehende Linie so gegeben sind, dass die Lage des Punktes und der Linie in Beziehung zum Körper bekannt und unveränderlich ist und man die Beschaffenheit des Körpers kennt, so kann man in Beziehung zu irgend einem beliebigen andern Anfangspunkte und einer von diesem ausgehenden Linie sich einen Körper denken, der dem gegebenen, wenn er mit ihm in einerlei Stellung gebracht wird, congruent ist, während zugleich jene Linien und deren Anfangspunkte für beide Körper congruiren. Insofern ein solcher Körper sammt der ihm angehörigen Linie und deren Anfangspunkte dazu dient, um die Theile eines gegebenen Körpers in Beziehung auf das Gleichartige ihres Verhaltens zu einer solchen mit ihm in Verbindung stehenden Linie und zu deren Anfangspunkte mit einander zu vergleichen, so heisst er *Vergleichungskörper* des gegebenen Körpers. Der leichteren Darstellung wegen ruhe der Vergleichungskörper so auf einer Horizontalebene, dass wenigstens ein Punkt desselben *in*, aber keiner *unter* die Horizontalebene fällt, während die Linie, von der es sich handelt, auf dieser Ebene senkrecht steht. Diese Linie selbst heisse in dieser Hinsicht vorläufig die *Umdrehungsnormale* des Körpers für die gegebene aufrechte Stellung desselben auf der Horizontalebene. Unter dieser Umdrehungsnormale sind jedoch nicht die beiden in ihr (als blosse Linie genommen) denkbaren Richtungen, sondern es ist nur die eine davon gemeint, die andere Richtung heisse *Umdrehungs-Gegennormale*.

Insofern hier nur von der einen der 2 in einer Linie liegenden Richtungen die Rede ist, hat man auch hier wieder 2 Arten der Vergleichung der Theile eines Körpers in Hinsicht auf gleichmässiges Vertheiltsein gleichwerthiger Theile um eine solche Normale, die jenen Vergleichungsarten bei ebenen Figuren ganz ähnlich sind. Bei der *ersten Art der Vergleichung* bringt man den gegebenen Körper nebst dessen

Umdrehungsnormale in einerlei Stellung mit dem Vergleichungskörper, so dass Congruenz statt hat, dreht dann den gegebenen Körper um die Normale seines Anfangspunktes als Axe der Umdrehung und beachtet die Anzahl der unter den hier vorhandenen Bedingungen [28] möglichen Stellungen des gegebenen Körpers, in denen er seinem Vergleichungskörper ebenbildlich (congruent) ist, die nach der ganzen Umdrehung nothwendig eintretende, mit der vor der Drehung stattgefundenen ursprünglichen Stellung identische, nicht als eine besondere betrachtend, so dass beide nur für *eine* Stellung gezählt werden. Man erhält so das Resultat: *der Körper habe für diese bestimmte Umdrehungsnormale p identische oder ebenbildliche Stellungen einer*, folglich auch jeder, *Art.*

Wenn eine gerade Säule mit quadratischer Basis mit einer ihrer Grundflächen auf einer Horizontalebene steht, so hat sie für die durch die Mittelpunkte beider quadratischen Flächen gelegte Umdrehungsnormale, d. h. für die eine Richtung in dieser Umdrehungsaxe 4 ebenbildliche Stellungen jeder Art. Eine gerade Pyramide mit gleichseitig-dreiseitiger Basis, die in der Horizontalebene liegt, hat für die durch die Spitze gehende Umdrehungsnormale 3 identische Stellungen jeder Art. Denkt man sich unter der Figur *b* einen Körper, der von Fig. 228.
einer 2×3seitigen Fläche und 3 grösseren und 3 kleineren Dreieckflächen begrenzt ist, so dass die letzten 6 Flächen sich in einem Punkte schneiden, der über dem Mittelpunkte jener 2×3seitigen Fläche in der Mittelpunktsnormale derselben liegt, so hat dieser Körper für diese Normale 3 ebenbildliche Stellungen jeder Art.

Für irgend eine bestimmte gegebene Stellung eines Körpers auf einer Horizontalebene kann jede auf der Horizontalebene senkrechte, in Beziehung zum Körper in unveränderlicher Lage gedachte Linie als Umdrehungsnormale angesehen werden. Unendlich viele von diesen Normalen sind *so* beschaffen, dass, wenn man den Körper um sie, als Umdrehungsaxen, dreht, derselbe keine zweite Stellung erhält, die der ersten identisch wäre (denn die nach der ganzen Umdrehung stattfindende ist wieder die erste). Wenn bei einer bestimmten Stellung eines Körpers auf der Horizontalebene eine der unendlich vielen denkbaren Normalen so beschaffen ist, dass in Beziehung zu ihr der Körper 2 oder mehrere identische Stellungen jeder Art hat, so ist unter den übrigen dieser Normale parallelen Linien keine andere mehr, in Beziehung zu welcher der Körper,

wenn sie als Umdrehungsnormale für denselben gedacht wird, noch eine 2te der ursprünglichen identische Stellung hätte. Bildet man durch Fällung von Perpendikeln aus allen Eckpunkten des Körpers auf die Horizontalebene und Vereinigung je zweier solcher durch die Perpendikel [29] aus den beiden Enden einer jeden Kante des Körpers bestimmten Punkte in dieser Ebene mittelst gerader Linien die *Horizontalprojection* des Körpers, so trifft eine solche Normale den einzigen bestimmten Mittelpunkt, welchen diese Projection in solchem Falle hat. Zwei Punkte oder Theile *A* und *B* eines Körpers, die so mit einander übereinstimmen, dass der eine *A* in einer durch Umdrehung um eine bestimmte Normale entstandenen, der ursprünglichen Stellung identischen, Stellung des Körpers an dem Orte sich befindet, den in der ursprünglichen Stellung der andere Punkt oder Theil *B* einnahm, heissen in Beziehung zu dieser Normale ebenbildliche oder identische Punkte oder Theile des Körpers. Abstrahirt man von der bestimmten Normale, so sind allgemein zwei Punkte oder Theile *a* und *b* eines Körpers einander ebenbildlich oder *identisch*, wenn der Körper sich in eine solche identische Stellung mit einem beliebigen Vergleichungskörper von ihm setzen lässt, in welcher der Punkt oder Theil *a* des gegebenen Körpers mit dem Punkte oder Theile *b* des Vergleichungskörpers zusammenfällt.

Wenn ein Körper in Beziehung zur Normale des Mittelpunktes einer für ihn möglichen Horizontalprojection *p* identische, durch blosse Umdrehung um diese Normale mit einander vertauschbare Stellungen jeder Art hat, so nennt man ihn einen *in Beziehung zu dieser Normale pgliedrigen Körper* und diese Umdrehungsnormale selbst eine *pgliedrige Axe des*
Fig. 229 b. *Körpers* (so ist z. B. die Linie, welche durch den Mittelpunkt der Endflächen einer geraden Säule mit 2 × 4seitiger 4gliedriger Basis geht, eine 4gliedrige Axe, *axis quaternoalatus*); denn wenn man jeden der beiden durch diese Axe von einander getrennten Theile einer jeden durch diese Axe legbaren Ebene eine *Flügelebene* oder Flügelfläche dieser Axe nennt, so ist die Anzahl der in Beziehung zu einer und derselben Richtung in dieser Axe ebenbildlichen Flügelebenen jeder Art $= p$. Wenn für eine gegebene Stellung eines Körpers auf einer Horizontalebene keine Normale möglich ist, in Beziehung zu welcher der Körper mehr als 1*gliedrig* wäre, so ist hierdurch noch keine Bestimmung gegeben, welche von diesen

einander parallelen Normalen als die fragliche 1 *gliedrige Axe* (*axis singuloalatus*) anzusehen sei, so dass jede auf der Horizontalprojection in diesem Falle senkrechte Linie für diese 1 gliedrige Axe angenommen werden kann. Jede auf [30] eine p gliedrige Axe senkrechte Ebene ist eine in Beziehung auf die eine Richtung in dieser Axe p gliedrige Figur; denn die Menge in ihr liegender, in Beziehung auf eine solche Richtung in jener Axe ebenbildlicher Punkte oder Theile jeder Art ist $= p$. Ihrer Form nach, als ebene Figur an sich betrachtet, muss sie gleichfalls eine p gliedrige Figur im weiteren Sinne des Wortes sein, d. h. eine $x \cdot p$ gliedrige oder 2 fach $x \cdot p$ gliedrige, wo nicht p, wohl aber x verschiedene Werthe haben kann für die verschiedenen einander parallelen solchen Ebenen. Auch die auf eine Axe senkrechte Horizontalprojection eines in Beziehung auf die eine Richtung in dieser Axe p gliedrigen Körpers ist eine in Beziehung auf diese Richtung p gliedrige Figur. Jede p heit unter sich in genannter Beziehung ebenbildlicher Flügelflächen dieser Axen entspricht einer in der Horizontalprojection liegenden p heit von unter sich ebenbildlichen Strahlen. Jede p heit unter sich in Hinsicht auf ihr Verhalten zu der einen Richtung in jener Axe ebenbildlicher, der Axe paralleler Linien steht auf einer p heit unter sich ebenbildlicher Punkte der Horizontalprojection u. s. w.

Bei der *zweiten Art der Vergleichung der Theile eines Körpers, in Beziehung auf ihr Vertheiltsein um eine bestimmte Axe*, bildet man den zu dem bestimmten Anfangspunkte der fraglichen Normale gehörigen Gegenkörper des Vergleichungskörpers, bringt den zu untersuchenden gegebenen Körper in identische Stellung mit dem Vergleichungskörper so, dass auch die zu untersuchenden Normalen und deren Anfangspunkte für beide Körper congruiren, setzt dann an die Stelle des Vergleichungskörpers seinen Gegenkörper dadurch, dass man jene Normale dieses Gegenkörpers in einer beliebigen, durch sie gelegten Ebene um den Anfangspunkt so dreht, dass sie 180° durchläuft und dann zusammenfällt mit der Umdrehungsnormale des *gegebenen* Körpers, so dass der zu der umgekehrt gewordenen Normale gehörige Körper selbst umgekehrt, d. h. aus der *antinormalen* Stellung in die *normale* versetzt ist, lässt diesen nun ruhig bleiben, dreht den gegebenen Körper um seine Normale und beachtet, ob für ihn unter diesen Bedingungen eine Stellung möglich ist,

in welcher er mit dem erwähnten Gegenkörper des Vergleichungskörpers congruent ist oder nicht.

Zwei Punkte oder Theile a und b eines Körpers heissen in Beziehung auf ihr Verhalten zu einer bestimmten Normale gegenbildlich [31] gleich, wenn für den gegebenen Körper eine solche Stellung möglich ist, in der er seinem Gegenkörper congruent wird, während zugleich die fraglichen Normalen und deren Anfangspunkte zusammenfallen und der Punkt (oder Theil) a des gegebenen Körpers mit demjenigen Punkte oder Theile des Gegenkörpers zusammenfällt, welcher der dem Punkte b *entsprechende* Gegenpunkt ist. Allgemein und ohne Rücksicht auf eine bestimmte Normale sagt man: zwei Punkte (oder Theile) a und b eines seinem Gegenkörper in ebenbildlicher Stellung congruenten Körpers seien gegenbildlich gleich, wenn der gegebene Körper sich mit dem Gegenkörper so in identische Stellung bringen lässt, dass der Punkt a des gegebenen Körpers mit dem, dem Punkte b als Gegenpunkt entsprechenden, Punkte des Gegenkörpers congruirt. Denn wird z. B. der dem Punkte b entsprechende Punkt des Gegenkörpers mit b' bezeichnet, so ist also

$$b' \mid=\mid b;$$

ist dann $a \cong b'$,

so muss auch $a \mid=\mid b$ sein.

Ist die Umdrehungsnormale, in Beziehung zu welcher eine solche Uebereinstimmung zwischen Körper und Gegenkörper statt hat, eine $p$gliedrige Axe des Körpers, so ist der Körper in Beziehung zu dieser Axe 2*fach* p*gliedrig* und umgekehrt die Axe selbst in Beziehung auf den Körper eine 2fach $p$gliedrige (so ist z. B. eine gerade Pyramide mit gleichseitig-dreiseitiger Basis in Beziehung auf die durch die Spitze und durch den Mittelpunkt der Grundfläche gehende Axe ein 2fach 3gliedriger Körper und diese seine Axe eine 2fach 3gliedrige, *axis bis ternoalatus*); denn es können in einem solchen Körper gleichsam 2 zu einer und derselben Richtung dieser Axe gehörige $p$gliedrige Flügelflächensysteme mit einander verbunden gedacht werden, auf ähnliche Weise, wie in der 2fach $p$gliedrigen ebenen Figur zwei $p$gliedrige ebene Strahlensysteme mit einander verbunden gedacht wurden. Analog den doppelten Strahlen und den einfachen bei ebenen Figuren hat man hier 2 Arten *doppelter* neben unendlich

vielen Arten *einfacher* Flügelflächen, und das rücksichtlich der Anzahl von Strahlen jeder Art und rücksichtlich der Menge von Strahlenarten Gesagte lässt sich für eine *bestimmte* 2fach *p*gliedrige Axe, hinsichtlich der einen von beiden in ihr als einer Linie liegenden Richtungen zunächst betrachtet, unmittelbar auf die Flügelebenen anwenden. Eine doppelte Flügelfläche theilt, wenn [32] sie verlängert wird, den Körper *in 2 gleichstellig gegenbildliche Hälften*, gleich wie ein über den Mittelpunkt hinaus verlängerter doppelter Strahl eine ebene Figur in 2 nebengegenbildliche Hälften zerlegt.

Eine *p*gliedrige Axe, die nicht 2fach *p*gliedrig ist, heisst 1fach *p*gliedrig. Ein Körper heisst sonach in Beziehung zu einer *p*gliedrigen Axe ein 2fach *p*gliedriger, oder man sagt, eine *p*gliedrige Axe sei eine 2fach *p*gliedrige, wenn das Verhältniss sämmtlicher Theile des Körpers zu der einen Richtung in dieser Axe ein solches ist, welches dem Verhältnisse der Theile des Gegenkörpers zu der in diesem jener Richtung der fraglichen Axe entsprechenden Richtung ebenbildlich ist. Es sind dann also die einander entsprechenden Richtungen der Axe des gegebenen Körpers und jener des Gegenkörpers rücksichtlich auf das Verhalten zu sämmtlichen Theilen des Körpers, dem die Axe angehört, einander *ebenbildlich* und *gegenbildlich* zugleich.

Wenn ein Körper in Beziehung zu keiner Normale einer bestimmten Horizontalprojection von ihm höher als 2fach 1gliedrig ist, so liegen sämmtliche Normalen jener Projection, in Beziehung zu denen der Körper 2fach 1gliedrig ist, in einer einzigen bestimmten, auf der Horizontalprojection senkrechten Ebene, und die Annahme einer von ihnen zur 2fach 1gliedrigen Axe für die hier stattfindenden aufrechten Stellungen des Körpers kann, wenn keine anderweitigen Bestimmungsgründe vorhanden sind, willkürlich geschehen. Wenn man eine 2fach *p*gliedrige Normale als eine 2fach *p*gliedrige betrachtet, so sieht man die in Beziehung zu ihr sich gegenbildlich verhaltenden Theile des Körpers sowohl, als die bloss ebenbildlichen, für gleichwerthig an. Sagt man von einer 2fach *p*gliedrigen Normale, sie sei eine *p*gliedrige, so achtet man bloss auf die in Beziehung zu ihr ebenbildlichen Theile. Jede auf einer 2fach *p*gliedrigen Axe senkrechte Ebene ist eine in Beziehung auf die eine Richtung in dieser Axe 2fach *p*gliedrige; denn die Menge in ihr liegender, in Beziehung auf die eine Richtung in jener Axe ebenbildlicher Strahlen jeder

Art ist p, und je zwei solche $p$heiten verhalten sich in Beziehung zu derselben Richtung jener Axe gegenbildlich. Die Anzahl der, durch das Zusammenfallen zweier sich gegenbildlich verhaltenden Strahlen in einen einzigen gebildeten, Doppelstrahlen der einen Art sowohl als der andern Art ist p.

[33] Jede auf eine 2fach $p$gliedrige Axe senkrechte Schnittebene des Körpers ist als ebene Figur an sich betrachtet nothwendig eine 2fach $p$gliedrige ebene Figur im weiteren Sinne des Wortes, d. h. eine 2fach $x \cdot p$gliedrige, wo x, nicht aber p für die verschiedenen einander parallelen Ebenen der Art verschieden sein kann. Die hier erwähnte Eigenschaft der Horizontalschnitte ist eins der wichtigsten Erkennungsmittel einer 2fach $p$gliedrigen Axe. Die auf die 1fach $p$gliedrige Axe senkrechte Horizontalprojection eines Körpers ist in demselben Sinne eine 1fach $p$gliedrige ebene Figur. Jeder einfachen Flügelfläche entspricht ein einfacher Strahl in der Horizontalprojection. Zwei sich in Beziehung auf eine Richtung in der Axe gegenbildlich verhaltende, einander gleichwerthige Flügelflächen stehen auf sich gegenbildlich verhaltenden Strahlen der Horizontalprojection.

Bisher war immer nur von der einen in einer Axe liegenden Richtung die Rede. Vergleicht man beide solche Richtungen mit einander, so ergiebt sich schon aus dem Vorhergehenden, dass der Körper, der in Beziehung zur einen Richtung in einer Axe sich als ein 1fach $p$gliedriger oder als ein 2fach $p$gliedriger zeigte, auch hinsichtlich der anderen Richtung ebenfalls 1fach $p$gliedrig oder 2fach $p$gliedrig sein müsse. Man kann dieses ausdrücken durch den Satz: die beiden Richtungen einer jeden Axe seien gleichnamig (oder die beiden Enden einer Axe seien gleichnamig). Die zwei entgegengesetzten Richtungen einer Axe können aber sein

a) *gleichwerthig* in Beziehung zum Körper im Allgemeinen, und dann nennt man die Axe eine *gleichendige* oder 2*endige*,

b) *nicht gleichwerthig* in dieser Hinsicht, und dann heisst sie eine *ungleichendige* oder 2 $\times$ 1*endige* Axe.

Die einfachste Art des Gleichendigseins einer Axe oder, was dasselbe ist, des Gleichendigseins eines Körpers in Beziehung zu einer Axe ist nun aber diejenige, bei welcher der Körper durch eine auf diese Axe senkrechte Ebene so in 2 gleichwerthige Hälften getheilt werden kann, dass jedes der aus den Punkten der oberen Hälfte auf die mittlere Horizontalfläche gefällten Perpendikel, wenn man es unter diese Ebene

hinab so weit verlängert, dass die Verlängerung gleich dem Verlängerten ist, einen Punkt der unteren Hälfte trifft, der dem oben dazu gehörigen gleichwerthig ist. Es folgt daraus, dass in diesem Falle jede der fraglichen Axe parallele Linie im Körper eine [34] gleichendige sei. Eine solche gleichendige Axe, bei welcher jede der Axe parallele Linie eine gleichendige ist, nenne man eine *gleichstellig* 2*endige Axe.*

Bei einer gleichstellig 2endigen Axe verhalten sich die beiden Enden nothwendig gegenbildlich. Ist dabei die Axe eine 2fach $p$gliedrige, so sind ihre beiden Enden zugleich ebenbildlich. Bezeichnet man die Enden der einen Axe mit a und b, die derselben Axe im Gegenkörper mit a' und b', so ist $a \mathrel{|\cong|} a'$ und $b \mathrel{|\cong|} b'$, weil die Axe 2fach $p$gliedrig ist. Da nun aber eben angeführt wurde, dass $a \mathrel{|=|} b$, mithin auch $a' \mathrel{|=|} b'$ sein müsse, so folgt

aus	$a \mathrel{\vert\cong\vert} a'$
und	$b' \mathrel{\vert=\vert} a'$,
dass auch	$a \mathrel{\vert=\vert} b'$.
Da aber auch	$b \mathrel{\vert=\vert} b'$ ist, weil $b \mathrel{\vert\cong\vert} b'$,
so muss	$a \mathrel{\vert\cong\vert} b$ sein.

So wie bei jeder 2fach $p$gliedrigen Axe ist auch bei der gleichstellig 2endigen 2fach $p$gliedrigen Axe der mitten auf die Axe senkrechte Schnitt, rücksichtlich seines Verhaltens zu der Axe, eine 2fach $p$gliedrige Figur. Auch als ebene Figur an sich betrachtet muss sie nicht nothwendig eine mehrgliedrige sein. Ist die gleichstellig 2endige Axe eine 1fach $p$gliedrige, so sind ihre beiden Enden bloss gegenbildlich, ohne zugleich ebenbildlich zu sein. Der mittlere, auf einer gleichstellig 2endigen 1fach $p$gliedrigen Axe senkrechte Schnitt ist in Beziehung zu jeder der beiden Richtungen in der Axe eine 1fach $p$gliedrige Figur und auch als ebene Figur an sich betrachtet muss er nicht nothwendig mehrgliedrig sein. Der Ausdruck, ein auf eine Axe senkrechter Schnitt sei in Beziehung zu dieser Axe 2fach $p$gliedrig oder auch 1fach $p$gliedrig, bezieht sich immer auf sein Verhalten zu jeder der beiden Richtungen in der Axe einzeln genommen, sowohl hier als auch im Folgenden.

Um die übrigen möglichen Arten des Gleichendigseins von Axen zu finden, dient folgende Betrachtung. Da für jede bestimmte $p$gliedrige Axe eines Körpers nur *eine* mittlere,

auf ihr senkrechte Schnittebene möglich ist, so ist einleuchtend, dass, wenn der Körper durch diese Ebene in 2 gleichwerthige Theile getheilt werden soll, es für jede $p$heit unter sich ebenbildlicher Strahlen in der oberen Flächenseite dieser Horizontalebene, die in irgend einer bestimmten Beziehung zur oberen Körperhälfte [35] stehen (*der oberen Körperhälfte angehören*), auch eine $p$heit unter sich ebenbildlicher, der unteren Körperhälfte angehöriger Strahlen in der unteren Flächenseite dieser Ebene geben müsse, welche sowohl rücksichtlich auf das Verhalten zu der Körperhälfte, der sie angehören, im Allgemeinen, als auch rücksichtlich auf ihr Verhalten in Beziehung zu der mittleren Horizontalebene selbst jener zuerst genannten Strahlen-$p$heit gleichwerthig sein muss. Das Gleichwerthigsein 2er Strahlen in dem mittleren Horizontalschnitte ist aber, insofern man der Allgemeinheit wegen bloss von einfachen Strahlen redet, auf zweierlei Weise möglich. Sie sind nämlich entweder für das Bild einer und derselben Flächenseite ebenbildlich oder gegenbildlich.

a) Sie seien *ebenbildlich* für das Bild der einen Flächenseite des Horizontalschnitts als ebene Figur an sich betrachtet. Soll nun nicht, wie bei dem Gleichstelligzweiendigsein der Axe, das unmittelbare Zusammenfallen derjenigen Strahlen-$p$heit, welche der obern Körperhälfte angehört, mit derjenigen Strahlen-$p$heit des Horizontalschnitts, welche sich auf die untere Hälfte bezieht, stattfinden, so ist ersichtlich, dass man eine Menge $= 2p$ für das Bild der einen Flächenseite des Horizontalschnitts ebenbildlicher Strahlen vor sich haben wird, und dass also dann das Bild des mittleren Horizontalschnitts eine nicht weniger als $t$gliedrige ebene Figur sein darf (wenn $t = 2p$ ist). Es muss dann jeder der p Strahlen, welche sich auf die untere Körperhälfte beziehen, den Winkel von $\frac{360}{p}$ Geraden halbiren, den 2 benachbarte zu ihnen gehörige Strahlen mit einander bilden, welche sich eben so auf die obere Hälfte des Körpers beziehen; d. h. jede Flügelfläche der fraglichen Axe, die für die untere Körperhälfte eine bestimmte Bedeutung hat, muss die Neigung von $\frac{360}{p}$ Graden halbiren, welche von zweien einander in Beziehung zur oberen Körperhälfte ebenbildlichen Flügelflächen dieser Axe mit einander gebildet wird, deren jede in Beziehung auf jene

Bedeutung für die obere Körperhälfte sich zu jener in Beziehung auf ihre Bedeutung zur unteren Körperhälfte als gleichwerthig oder als gegenbildlich gleich verhält. Die beiden Körperhälften verhalten sich demnach selbst zu einander gegenbildlich.

Wenn bei einer gleichendigen Axe nicht jede ihre parallele [36] Linie eine gleichendige ist und dennoch die beiden Körperhälften, folglich auch die beiden ihnen entsprechenden Richtungen der zu untersuchenden Axe sich gegenbildlich verhalten, so sagt man, die Axe sei *gerenstellig gleichendig* oder *gerenstellig* 2*endig*. Bei der 2*fach pgliedrigen gerenstellig* 2*endigen Axe* verhalten sich die beiden Körperhälften zugleich auch als *ebenbildlich*, und der mittlere Horizontalschnitt ist, als ebene Figur an sich betrachtet, ein 2fach *t*gliedriger, während er für jede einzelne Richtung in der Axe bloss ein 2fach *p*gliedriger ist. Bei der bloss 1fach *pgliedrigen* gerenstellig 2endigen Axe aber verhalten sich die beiden Körperhälften *nicht als ebenbildlich*, und der mittlere Horizontalschnitt ist, als ebene Figur an sich betrachtet, ein *t gliedriger*, während er in Beziehung auf jede der beiden Richtungen in der Axe einzeln genommen bloss ein *p*gliedriger ist.

b) Die in der mittleren Horizontalebene liegende *p*heit von in Beziehung zur oberen Körperhälfte einander ebenbildlichen einfachen Strahlen verhält sich zu der ihr gleichwerthigen *p*heit unter sich in Beziehung zur unteren Körperhälfte ebenbildlicher, in derselben Horizontalebene liegender Strahlen für das Bild der einen Flächenseite dieses Schnittes als *gegenbildlich* gleich. Daraus folgt, dass die mittlere, auf die fragliche Axe senkrechte Schnittebene, als ebene Figur an sich gedacht, für eine jede *p*gliedrige Axe eine 2fach *p*gliedrige sein müsse, in welcher *p* doppelte Strahlen der einen und *p* doppelte Strahlen der andern Art vorkommen und in welcher der Winkel, welchen 2 benachbarte gegenbildliche gleichwerthige einfache Strahlen mit einander bilden, durch den dazwischen liegenden doppelten Strahl (der 1sten oder der 2ten Art) halbirt wird. Wird der ganze Körper um einen solchen doppelten Strahl seines mittleren Horizontalschnittes als eine Umdrehungsaxe umgedreht, so werden je 2 Strahlen der Horizontalebene, deren Winkel, den sie mit einander bilden, durch jenen doppelten Strahl halbirt wird, mit einander vertauscht, woraus folgt, dass ebenso die diesen Strahlen angehörigen Flügelflächen mit einander vertauscht

werden, so dass in diesem Falle beide Hälften des Körpers ebenbildlich sind.

Wenn nun die beiden Enden einer Axe demnach ebenbildlich sind, aber nicht zugleich sich gegenbildlich verhalten, so heisse die Axe eine *ebenbildlich* 2*endige* (im engern Sinne). Für die ebenbildlich gleichendige *p*gliedrige Axe ist der mittlere auf [37] ihr senkrechte Schnitt, als ebene Figur an sich gedacht, 2fach *p*gliedrig, während er in Beziehung auf eine jede der beiden Richtungen in dieser Axe bloss 1fach *p*-gliedrig ist.

Jede Axe ist sonach hinsichtlich ihres Charakters entweder

a) *gleichendig* oder 2*endig*, und dann ist sie

α) *gleichstellig* 2*endig*, wenn *jede* der Axe parallele Linie gleichendig ist;

I. αα) *gleichstellig* 2*endig* 2*fach p gliedrig*; es sind dann beide Enden ebenbildlich gegenbildlich,

II. ββ) *gleichstellig* 2*endig* 1*fach p gliedrig*; es sind dann beide Enden bloss gegenbildlich und nicht ebenbildlich;

β) *ungleichstellig oder nicht gleichstellig* 2*endig*,

αα) *gerenstellig* 2*endige* Axe, wenn die beiden Enden einer solchen Axe sich gegenbildlich verhalten;

III. aa) *gerenstellig* 2*endig* 2*fach p gliedrig*, wenn beide Enden einander ebenbildlich und gegenbildlich zugleich sind;

IV. bb) *gerenstellig* 2*endig* 1*fach p gliedrig*, wenn die beiden Enden einander bloss gegenbildlich und nicht zugleich ebenbildlich sind;

V. ββ) *ebenbildlich gleichendig* 1*fach p gliedrig*, wenn die Axe nicht gegenbildlich gleichendig, aber doch gleichendig, mithin ebenbildlich gleichendig ist. Sie kann aus diesem Grunde auch nicht 2fach *p*gliedrig sein;

b) *ungleichendig oder* 2 × 1*endig*, und dann ist sie

VI. αα) *ungleichendig* 2*fach p gliedrig*,

VII. ββ) *ungleichendig* 1*fach p gliedrig*.

Man kann diese Verhältnisse auch auf folgende Weise tabellarisch darstellen. Bei jeder Axe ist entweder

1) jedes Ende seinem Gegenbilde, d. h. der entsprechenden Richtung im Gegenkörper ebenbildlich, d. h. ihr ebenbildlich und gegenbildlich zugleich. Die Axe ist dann eine 2*fach p gliedrige*.

a) Die beiden Enden sind gleichwerthig, folglich einander ebenbildlich und gegenbildlich zugleich: *gleichendige* 2*fach p gliedrige Axe* oder 2*endige* 2*fach p gliedrige Axe*.

α) Jede der Axe parallele Linie ist gleichendig; dann ist die Axe *gleichstellig* 2*endig* 2*fach p gliedrig*;

β) nicht *jede* der Axe parallele Linie ist gleichendig, dann ist die Axe *gerenstellig* 2*endig* 2*fach p gliedrig*;

b) die beiden Enden sind ungleichwerthig: *ungleichendige* 2*fach p gliedrige Axe.*

[**38**] 2) Jedes Ende der Axe ist seinem Gegenbilde *nicht ebenbildlich*, dann ist die Axe bloss 1*fach p gliedrig*;

a) beide Enden sind gleichwerthig: *gleichendige* 1*fach p gliedrige Axe.* Sie können einander nicht ebenbildlich und gegenbildlich zugleich sein, sondern sind bloss

α) einander *ebenbildlich*, ohne zugleich gegenbildlich zu sein: *ebenbildlich gleichendige* 1*fach p gliedrige Axe**), oder

β) einander nicht ebenbildlich, folglich *gegenbildlich*: *gegenbildlich gleichendige* 1*fach p gliedrige Axe.*

αα) Jede der Axe parallele Linie ist gleichendig: *gleichstellig* 2*endige* 1*fach p gliedrige Axe;*

ββ) nicht jede der Axe parallele Linie ist gleichendig: *gerenstellig* 2*endige* 1*fach p gliedrige Axe;*

b) beide Enden der 1 fach *p* gliedrigen Axe sind ungleichwerthig: *ungleichendige oder* 2 × 1 *endige* 1*fach p gliedrige Axe.*

Um die beiden Enden einer Axe hinsichtlich ihrer etwaigen Gleichwerthigkeit mit einander zu vergleichen, kann man auch die Gesammtheit der auf dieser Axe senkrechten Schnittebenen untersuchen, dadurch, dass man je 2 derselben, die gleich weit vom Halbirungspunkte der Axe abstehen, hinsichtlich auf das Bild, welches ihre dem Mittelpunkte des Körpers nicht zugekehrte, d. h. ihre äussere Flächenseite darbietet, vergleicht. Sind nun die Bilder der äussern Flächenseiten je zweier zusammengehöriger, auf die Axe senkrechter Schnitte *ebenbildlich*, so ist die Axe *ebenbildlich gleichendig*, sind sie aber gegenbildlich, so ist auch die Axe *gegenbildlich gleichendig*, und sind endlich dieselben ebenbildlich und gegenbildlich zugleich, so ist auch die Axe *ebenbildlich gegenbildlich gleichendig* und zugleich ist dann natürlich die Axe eine 2*fach p gliedrige.*

---

*) Es sind hier stets der Axe parallele Linien vorhanden, welche ungleichendig sind.

III. Vom Mittelpunkt des Gleichwerthes und von den (durch den Mittelpunkt des Gleichwerthes gehenden) verschiedenen Arten von Axen eines und desselben Körpers. — Begriff der Hauptaxe.

Wenn ein Körper eine gleichendige Axe hat, so sind von dem Halbirungspunkte derselben die einander in Beziehung zu der Axe (d. h. für beide Richtungen in der Axe) gleichwerthigen Punkte desselben gleich weit entfernt. Ist der mittlere Schnitt senkrecht auf eine 2endige Axe ein solcher, der als ebene Figur [39] an sich betrachtet sowohl als auch in Hinsicht auf das Verhältniss desselben zu jeder der beiden Richtungen in jener Axe einzeln genommen nicht bloss 1fach oder 2fach 1gliedrig ist, so hat diese Schnittebene einen bestimmten Mittelpunkt und dieser ist zugleich Mittelpunkt des Körpers, von welchem die unter sich gleichwerthigen Punkte und Theile derselben gleich weit abstehen, d. h. ist *Mittelpunkt des Gleichwerths für den Körper.* Wenn ein Körper keine 2endige Axe besitzt, für welche der mittlere auf ihr senkrechte Schnitt *in der erwähnten Beziehung* mehr als 1fach oder 2fach 1gliedrig ist, so hat der Körper auch keinen *absolut bestimmten Mittelpunkt des Gleichwerthes.* Ueberhaupt kann man folgende Fälle unterscheiden:

a) Der Körper hat einen einzigen bestimmten Mittelpunkt des Gleichwerthes.

b) Es ist eine gerade, in Beziehung zum Körper in bestimmter Lage befindliche Linie denkbar, in welcher jeder Punkt als Mittelpunkt des Gleichwerthes für den Körper angenommen werden kann, z. B. in der einfach geraden Pyramide mit regelmässiger 6seitiger Basis die auf der Basis im Mittelpunkte derselben senkrecht stehende Linie.

c) Es ist eine Ebene im Körper denkbar, in welcher jeder Punkt als Mittelpunkt des Gleichwerthes angenommen werden kann. In einer Gestalt z. B., welche entsteht, wenn man zwei sich gegenbildlich verhaltende Pyramiden mit 1fach 1gliedrigen dreieckigen Grundflächen mit diesen Grundflächen so an einander legte, dass die neue Gestalt eine auf der gemeinschaftlichen Ebene beider Hälften senkrechte gleichstellig 2endige 1fach 1gliedrige Axe erhält, würde eben diese gemeinschaftliche Ebene beider Hälften die fragliche Eigenschaft besitzen.

d) Jeder in Beziehung zum Körper gedachte Punkt kann als Mittelpunkt des Gleichwerthes angesehen werden; dieses ist der Fall, wenn der Körper keine 2 gleichwerthigen Punkte irgend einer Art hat, z. B. bei einer von vier ungleichen ungleichschenkligen Dreiecken umschlossenen Gestalt. Dass nicht umgekehrt alle vom Mittelpunkte des Gleichwerthes gleich weit abstehende Punkte eines Körpers auch gleichwerthig seien, ist unmittelbar einleuchtend. Man kann von nun an den Begriff der Axe dahin beschränken: Axe sei jede der durch den, für den Körper seiner Beschaffenheit gemäss angenommenen, Mittelpunkt des Gleichwerthes gehenden Linien.

[**40**] Bei der Vergleichung zweier oder mehrerer Axen eines Körpers mit einander findet man

1) ob sie hinsichtlich ihres Charakters mit einander übereinstimmen oder nicht, d. h. ob sie *gleichnamig* oder *ungleichnamig* sind;

2) ob gleichnamige Axen auch *gleichwerthig* sind *oder nicht*. Eine Axe, die keiner andern Axe desselben Körpers gleichwerthig ist, heisse eine einheitliche Axe des Körpers (*axis singularis*), weil sie für sich eine Einheit bildet und sich dadurch von solchen einzelnen Axen unterscheidet, die mit andern zusammengenommen Zweiheiten, Dreiheiten u. s. w. von Axen gleicher Art bilden.

Wenn ein Körper nur *eine* Axe besitzt, welche eine *einheitliche Axe* ist, so sind seine wichtigsten Stellungen die, bei denen diese Axe senkrecht steht; diese Axe heisst dann *Hauptaxe des Körpers* (*axis principalis*).

Wenn ein Körper mehrere einheitliche Axen besitzt, so ist kein Grund vorhanden, warum man nicht eine derselben willkürlich (oder wegen anderer nicht rein mathematischer Rücksichten) sollte als Hauptaxe betrachten können. Haben die verschiedenen einheitlichen Axen eines Körpers auch einen verschiedenen Charakter, so wird man ihn, je nachdem man die eine oder die andere solche einheitliche Axe als Hauptaxe ansieht, als Glied in verschiedenen Reihen von Gestalten-Familien betrachten müssen, wenn man die Gesammtheit sämmtlicher denkbarer Gestalten in Abtheilungen bringt, die von den Eigenschaften und dem Charakter der Axen entnommen sind. Wenn ein Körper keine einheitliche Axe besitzt, so kann für ihn auch keine Axe als Hauptaxe angenommen werden, wenn man nicht zwischen wesentlich Gleichwerthiges eine Verschiedenheit setzen will, die in der

Beschaffenheit des Körpers ungegründet ist. **Man nennt** eine Gestalt, in welcher eine Axe als Hauptaxe angenommen werden muss oder angenommen werden kann, eine *hauptaxige Gestalt*, während man eine solche, die keine Hauptaxe hat, eine *hauptaxenlose Gestalt* nennt.

IV. Strahlensysteme und Axensysteme hauptaxiger Gestalten.

1) Allgemeine Eigenschaften derselben.

Man denke sich in jeder Axe die beiden, vom Mittelpunkte des Körpers ausgehenden, in ihr liegenden Richtungen einzeln und nenne diese Richtungen Strahlen oder *Radien*, so ist ersichtlich, [41] dass in jedem Körper so viele Strahlen möglich sein werden, als in einer Kugel Radien denkbar sind. Durch die Hauptaxe und durch jeden Strahl ausser ihr kann eine Hauptflügelfläche (Flügelfläche der Hauptaxe) gelegt werden. Durch einen in einer bestimmten Hauptflügelfläche liegenden Strahl kann eine auf jene Flügelfläche senkrechte Ebene gelegt werden. Durch einen und denselben solchen Strahl kann nur *eine* derartige Ebene gelegt werden, weil durch ihn auch nur *eine* Flügelfläche der Hauptaxe geht. Wenn nun aber durch einen Strahl zwei auf einander senkrechte Ebenen gelegt sind, so bilden diese in Beziehung zu dem Strahle selbst vier Flügelflächen desselben. Die auf solche Weise entstehenden vier Flügelflächen eines Strahles, der nicht in die Hauptaxe fällt, können nicht alle vier gleichwerthig sein, sondern nur höchstens je zwei einander diesseit und jenseit des Strahles gegenüberstehende, weil in dem einen solchen Paare die Hauptaxe liegt, im andern nicht.

Aus dem Gesagten folgt, dass bei hauptaxigen Gestalten ein Strahl, der nicht in die Hauptaxe fällt, höchstens 2gliedrig sein könne, d. h. dass er entweder

1) 2fach 2gliedrig oder
2) 1fach 2gliedrig oder
3) 2fach 1gliedrig oder
4) 1fach 1gliedrig sein müsse.

Welche von diesen vier verschiedenen Benennungen ihm gebühre, hängt von der Beschaffenheit der beiden erwähnten, durch ihn gelegten Ebenen und von der Art und Weise ab, wie er in jeder derselben liegt. Ist die Flügelfläche der

Hauptaxe, in welcher er liegt, eine doppelte, so wird sie auch für ihn 2 doppelte Flügelflächen bilden. Die Hauptaxe hat aber nur dann doppelte Flügelflächen, wenn sie eine 2*fach* *p*gliedrige ist. Soll ein Strahl ein 2gliedriger sein, so muss er in der Flügelfläche der Hauptaxe so liegen, dass er mit beiden Strahlen der Hauptaxe gleiche Winkel bildet, d. h. er muss auf die Hauptaxe senkrecht sein; denn an jedem 2gliedrigen Strahle müssen je 2 einander gerade entgegenstehende (d. h. einen Winkel von 180° mit einander bildende) Flügelflächen einander ebenbildlich sein, was nicht möglich wäre, wenn ein solcher Strahl mit dem einen Strahle der Hauptaxe einen grösseren Winkel bildete, als mit dem andern. Es muss aber auch ferner aus demselben Grunde der mittlere Querschnitt den ganzen Körper nebst jener einzelnen [**42**] Hauptflügelfläche, in welcher der fragliche Strahl liegt, in zwei ebenbildliche Hälften zertheilen, so dass hierdurch das Bild jeder einzelnen Flächenseite dieser Hauptflügelfläche, als ebene Figur an sich betrachtet, in zwei nebengegenbildliche Hälften getheilt wird, wenn der Strahl ein 2gliedriger sein soll. Theilt der mittlere Horizontalschnitt den Körper in 2 gleichstellig gegenbildliche Hälften, so bildet er für jeden in ihm liegenden Strahl 2 entgegengesetzte doppelte Flügelflächen. 2fach 1gliedrige Strahlen müssen daher entweder in doppelten Hauptflügelflächen oder in einem solchen mittleren Horizontalschnitte liegen, der den Körper in 2 gleichstellig gegenbildliche Hälften theilt. Ein Strahl, der diesen beiden Bedingungen zugleich entspricht, ist 2fach 2gliedrig. Ein Strahl, der weder in einer doppelten Hauptflügelfläche, noch auch im mittleren Querschnitte liegt, wenn dieser für jeden in ihm liegenden Strahl doppelte Flügelflächen bildet, ist 1fach 1gliedrig. Da die Menge von ebenbildlichen Stellungen eines Körpers, mithin auch eines Strahlensystems, wobei ein bestimmter (1fach oder 2fach) $x$gliedriger Strahl aufwärts gerichtet ist, von dem Werthe der Zahl x abhängt, die seinen Charakter bestimmt, d. h. $= x$ ist, so wird, wenn n die Menge ebenbildlicher $x$gliedriger Strahlen bezeichnet, auch $n \cdot x$ die Menge von Stellungen jeder bestimmten Art sein, bei welchen ein solcher $x$gliedriger Strahl aufwärts gerichtet ist. Die in der vertical gestellten Hauptaxe liegenden beiden Strahlen heissen *Hauptstrahlen*, deren Flügelflächen *Hauptflügelflächen*. Die in dem mittleren Horizontalschnitte (mittleren Querschnitte) liegenden Strahlen heissen *Querstrahlen*, die gegen die Horizontalebene

geneigten Strahlen, die auf einer oder der anderen Flächenseite der Horizontalebene schief aufstehen, heissen *Strebestrahlen.* Die Ausdrücke *radius principalis*, *transversus*, *obliquus* dürften diese Unterschiede bezeichnen können.

Nach diesen Erläuterungen wird nun die Auffassung der Verschiedenheiten von Strahlensystemen in hauptaxigen Gestalten*) möglich sein.

[43] **2) Aufstellung der verschiedenen Systeme.**

I. Die Hauptaxe sei gleichstellig 2endig 2fach *p*gliedrig, z. B.

Fig.	236	gleichstellig	2endig	2fach	1gliedrig
-	237	-	2 -	2 -	2 -
-	238	-	2 -	2 -	2 -
-	239	-	2 -	2 -	4 -
-	240	-	2 -	2 -	6 - .

Man hat dann

1) *Zwei 2fach pgliedrige* |≌| sich verhaltende *Hauptstrahlen*, welche zusammen die gleichstellig 2endige Hauptaxe bilden.

2) *p Querstrahlen der ersten Art*, welche 2fach 2gliedrig sind, sich |≌| verhalten und in den der Hauptaxe angehörigen doppelten Flügelflächen der ersten Art und im mittleren Querschnitte liegen. Je 2 benachbarte bilden einen Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden.

---

*) Da es schwierig ist, sich die körperlichen Strahlensysteme deutlich vorzustellen, ohne sie an einzelnen Gestalten entwickelt zu haben, so wird bei der nun folgenden Untersuchung der Eigenschaften der einzelnen Reihen von Strahlensystemen jedesmal eine Verweisung [43] auf einige abgebildete Gestalten vorangeschickt werden, an denen derartige Strahlensysteme für einzelne bestimmte Zahlenwerthe von *p* erkannt werden können. Man hat nämlich nur nöthig, in der allgemeinen Beschreibung an die Stelle der Zahl *p* die einzelne bestimmte Zahl zu setzen, die ihr entspricht, so hat man die specielle Beschreibung des einzelnen Strahlensystems, welches dieser oder jener abgebildeten Gestalt entspricht. Die Abbildungen der körperlichen Gestalt sind (wenn nicht ausdrücklich eine Abweichung von diesem Gesetze angegeben ist) stets so gezeichnet, dass die als Hauptaxe zu betrachtende Linie parallel liegt mit den kürzeren Seiten der rechtwinkligen Einfassung der ganzen Tafel, auf welcher die Abbildung sich befindet.

3) *p Querstrahlen der zweiten Art*, die gleichfalls 2fach 2gliedrig sind, sich daher unter einander als $|\cong|$ verhalten und in den doppelten Hauptflügelflächen der zweiten Art liegen. Jeder bildet mit jedem ihm benachbarten der ersten Art einen Winkel von $\frac{360}{2p}$ Graden.

4) Die übrigen Querstrahlen, deren jeder ein *2fach 1gliedriger Querstrahl* ist, dessen doppelte Flügelflächen in dem mittleren Querschnitte liegen. Die Anzahl 2fach 1gliedriger Querstrahlen einer Art ist $= 2p$; in Beziehung zum einen Hauptstrahle verhalten sich die p einen (von denen je 2 benachbarte [44] unter Winkeln von $\frac{360}{p}$ Graden divergiren) unter sich als ebenbildlich und zu den p andern unter sich in derselben Beziehung ebenbildlichen als gegenbildlich; in Beziehung zur ganzen Hauptaxe aber, so wie in Beziehung zum ganzen Körper, sind die p zu einer und derselben Art gehörigen 2fach 1gliedrigen Querstrahlen $|\cong|$. Die Anzahl von Arten 2fach 1gliedriger Querstrahlen ist unendlich, d. h. hier so viel als gleich der Menge von Strahlen, welche innerhalb der Schenkel eines ebenen Winkels von $\frac{360}{2p}$ Graden von dessen Scheitel divergirend ausgehend gedacht werden können, die beiden Schenkel selbst nicht mitgezählt*).

5) Die Strebestrahlen in den *Hauptflügelflächen erster Art*, deren jeder ein *2fach 1gliedriger Strebestrahl* ist, dessen doppelte Flügelflächen in jener durch ihn gehenden Hauptflügelfläche liegen. Die Anzahl solcher Strahlen einer Art ist $= 2p$. Je 2 einer Art liegen in einer und derselben Hauptflügelfläche und der Winkel, den jeder mit dem ihm zunächst liegenden Hauptstrahle bildet, ist für beide Strebestrahlen von gleicher Grösse. Die Anzahl von Arten solcher

*) Um ähnliche Ausdrücke kürzer geben zu können, bedeute *Menge der Strahlen, die ein Winkel von n Graden fasst*, die Anzahl von Strahlen, die in einem Winkel von n Graden innerhalb der beiden Schenkel liegend, vom Scheitel ausgehend gedacht werden können, die beiden Schenkel selbst nicht mitgerechnet.

Aehnlich diesem ist der Ausdruck: *Menge von Strahlen, die von einer* (auf anzugebende Weise) *bestimmten Ecke* gefasst werden = Menge von Strahlen, die innerhalb dieser Ecke liegend, von dem Eckpunkte ausgehen können, die in den Ebenen, von denen die Ecke gebildet wird, liegenden Strahlen nicht mitgezählt.

Strebestrahlen ist unendlich, d. h. gleich der Menge von Strahlen, die ein rechter Winkel fasst.

6) Die *2fach 1gliedrigen Strebestrahlen in den Hauptflügelflächen zweiter Art*, für deren jeden die ihm angehörigen doppelten Flügelflächen in der Hauptflügelfläche zweiter Art, die durch ihn geht, liegen. Von ihnen gilt, was von denen gesagt worden ist, die in den Hauptflügelflächen erster Art liegen.

7) Die übrigen Strebestrahlen sind 1fach 1gliedrige. Je 2 1fach 1gliedrige, sich gegenbildlich verhaltende, gleichwerthige [**45**] Strebestrahlen liegen in einer und derselben einfachen Hauptflügelfläche, die $2p$ einfachen Hauptflügelflächen enthalten daher $2 \cdot 2p = 4p$ 1fach 1gliedrige Strebestrahlen einer Art; die $2p$ einen unter sich ebenbildlichen verhalten sich zu den $2p$ andern unter sich ebenbildlichen als gegenbildlich gleich. Die Anzahl ebenbildlicher 1fach 1gliedriger Strebestrahlen einer Art ist daher $= 2p$. Die Menge von Arten 1gliedriger Strebestrahlen ist ∞, d. h. gleich der Anzahl von Strahlen, die eine Ecke fasst, welche von zwei rechten Winkeln und einem Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden gebildet ist.

Ist p eine gerade Zahl, so ist nicht bloss die Hauptaxe eine gleichendige Axe, sondern je 2 entgegengesetzte Strahlen sind gleichwerthig und bilden eine gleichendige Axe. Von den übrigen Axen sind alle 2fach 2gliedrigen Axen dann *gleichstellig 2endig*, alle 2fach 1gliedrigen und alle 1fach 1gliedrigen aber sind *gerenstellig 2endig*. Ist p eine ungerade Zahl, so ist je ein 2fach 2gliedriger Querstrahl der ersten Art einem solchen der zweiten Art entgegengesetzt und bildet mit ihm eine ungleichendige Queraxe, je 2 zu einer 2fach 2gliedrigen Queraxe senkrechte Querstrahlen bilden dann eine gleichstellig 2endige 2fach 1gliedrige Queraxe. Jede andere Axe des Körpers, die in eine durch die Hauptaxe und durch eine gleichstellig 2endige 2fach 1gliedrige Queraxe gelegte Ebene fällt, ist eine ebenbildlich gleichendige 1fach 1gliedrige Axe. Alle übrigen 2fach 1gliedrigen sowohl, als auch 1fach 1gliedrigen Axen sind ungleichendige Axen.

Die Menge von ebenbildlichen Stellungen einer jeden einzelnen beliebigen Art ist für jede Gestalt mit gleichstellig 2endiger 2fach $p$gliedriger Hauptaxe $= 2p$; denn die Producte aus der Anzahl n von ebenbildlichen Strahlen einer

Art in die Zahl x, welche die Menge von ebenbildlichen Stellungen beim senkrechten Aufwärtsgerichtetsein eines solchen Strahles angiebt, ist stets $= 2p$.

Es ist nämlich [46]

	Der Werth von n	Der Werth von x
Bei den 2 2fach $p$gliedrigen ebenbildlichen Hauptstrahlen	2	p
Bei den p 2fach 2gliedrigen Querstrahlen jeder der beiden Arten .	p	2
Bei den $2p$ einander *ebenbildlichen* 2fach oder 1fach 1gliedrigen Strahlen	$2p$	1 .

Auch ist ersichtlich, dass das Product der sämmtlichen Zahlen in jedem der einzelnen Theile α, β, γ, δ des Ausdrucks:

»Zu einer Art von Strahlen gehören entweder α) 2 Strahlen, »die 2fach $p$gliedrig, oder β) p Strahlen, die 2fach 2glie»drig, oder γ) $2p$ Strahlen, die 2fach 1gliedrig, oder »δ) $2 \times 2p$ Strahlen, die 1fach 1gliedrig sind«

ein und dieselbe Grösse habe; denn $2 \cdot 2p = p \cdot 2 \cdot 2 = 2p \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 2p \cdot 1$, ein Gesetz, welches von den die Menge der ebenbildlichen Stellungen betreffenden hier sowohl als bei den folgenden Strahlensystemen abhängt.

II. Die Hauptaxe sei gleichstellig 2endig 1fach $p$gliedrig, z. B.

Fig. 241	gleichstellig	2endig		1fach		2gliedrig	
- 242	-	2	-	1	-	4	-
- 243	-	2	-	1	-	6	- .

Es sind dann vorhanden:

1) Zwei 1*fach pgliedrige Hauptstrahlen*, die sich gegenbildlich verhalten (nicht aber ebenbildlich sind); sie haben keine doppelte Flügelfläche.

2) *Querstrahlen.* Jeder Querstrahl ist 2fach 1gliedrig, so dass der mittlere Querschnitt seine doppelte Flügelfläche enthält. Die einer und derselben Art angehörigen Querstrahlen sind in Beziehung zum ganzen Körper und auch in Beziehung auf das Bild jeder einzelnen Flächenseite des mittleren Querschnitts ebenbildlich. Die Anzahl von Querstrahlen einer

Art ist $= p$. Die Anzahl von Arten der Querstrahlen ist $= \infty$, d. h. gleich der Menge von Strahlen, die ein Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden (den zwei benachbarte Querstrahlen einer Art mit einander bilden) fasst, den einen Schenkel des Winkels dazu gerechnet.

[**47**] 3) *Strebestrahlen.* Jeder Strebestrahl ist 1fach 1gliedrig. Die einer und derselben Art angehörigen, auf einerlei Flächenseite des mittleren Querschnittes schief aufstehenden sind ebenbildlich. Die Menge ebenbildlicher Strebestrahlen einer Art ist $= p$. Die auf entgegengesetzten Flächenseiten jenes Schnittes aufstehenden solchen Strahlen *einer* Art verhalten sich gegenbildlich. Die Anzahl von Strebestrahlen einer Art ist also $= 2p$. Die Menge von Arten solcher Strahlen ist gleich der Menge von Strahlen, die eine Ecke fasst, welche von zwei rechten Winkeln und einem Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden eingeschlossen ist, $+$ der Menge von Strahlen, die ein rechter Winkel fasst.

Ist p eine gerade Zahl, so sind je zwei einander entgegengesetzte Strahlen gleichwerthig, mithin ist jede Axe gleichendig, und zwar die Hauptaxe gleichstellig 2endig 1fach $p$gliedrig, jede Queraxe gerenstellig 2endig 2fach 1gliedrig, jede Strebeaxe gerenstellig 2endig 1fach 1gliedrig. Ist p aber ungerade, so ist nur die Hauptaxe gleichstellig 2endig 1fach $p$gliedrig, jede andere Axe aber ist ungleichendig.

Die Menge ebenbildlicher Stellungen jeder einzelnen Art bei senkrecht aufwärts gerichtetem Hauptstrahle ist hier bloss $= 1 \cdot p$, so wie auch die Menge von Stellungen jeder einzelnen andern Art $= p \cdot 1$ ist. Auch hier ist $1 \cdot p = p \cdot 1$.

III. Die Hauptaxe sei gerenstellig 2endig 2fach $p$gliedrig, z. B.

Fig.	244 *A*. u. *B*.	gerenstellig	2endig	2fach	1gliedrig
-	245	-	2 -	2 -	2 -
-	246 *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*.	-	2 -	2 -	3 - .

Man hat dann

1) *Zwei Hauptstrahlen*, deren jeder 2*fach* p*gliedrig* ist; sie verhalten sich $|\cong|$. Die doppelten Flügelflächen der ersten (oder zweiten) Art für den einen Hauptstrahl fallen mit den doppelten Flügelflächen der zweiten (oder ersten) Art

des andern Hauptstrahls in eine und dieselbe doppelte Flügelfläche der ganzen Axe zusammen.

2) $2p$ *Querstrahlen der ersten Art*, deren jeder in einer der p doppelten Flügelflächen der ersten Art des einen, mithin auch in einer der p doppelten Flügelflächen der andern Art des andern Hauptstrahls liegt und ein 2*fach* 1*gliedriger* ist, dessen doppelte Flügelflächen in jener Flügelfläche des Hauptstrahls [**48**] liegen; man könnte einen solchen durch den Ausdruck *strebestrahlenartig* 2fach 1gliedriger Querstrahl bezeichnen. Die p einen Strahlen der Art sind einander in Beziehung zur obern Körperhälfte, die andern in Beziehung zur untern $|\cong|$, in Beziehung zum *ganzen Körper* sind diese und jene einander $|\cong|$.

3) $2p$ *Querstrahlen der zweiten Art*, deren jeder den Winkel von $\frac{360}{2p}$ Graden, den zwei benachbarte Querstrahlen der ersten Art mit einander bilden, halbirt und ein 1fach 2gliedriger Querstrahl ist. Die p einen verhalten sich sowohl in Beziehung zu jeder einzelnen Körperhälfte, als auch in Beziehung zu den p andern als $|=|$.

4) Die übrigen Querstrahlen, welche 1*fach* 1*gliedrig* sind. Von einer und derselben Art solcher Strahlen sind in Beziehung zu einer jeden der beiden (oberen und unteren) Körperhälften einzeln genommen p unter sich ebenbildliche vorhanden, die zu p andern, ihnen in derselben Beziehung gleichwerthigen, sich gegenbildlich verhalten; für beide Hälften des Körpers zusammen sind $2p$ ebenbildliche, mithin $2 \cdot 2p$ gleichwerthige 1fach 1gliedrige Querstrahlen einer Art möglich. Die Anzahl der Arten 1fach 1gliedriger Querstrahlen ist gleich der Menge von Strahlen, die ein Winkel von $\frac{360}{4p}$ Graden fasst.

5) Die 2*fach* 1*gliedrigen Strebestrahlen;* sie liegen in den doppelten Flügelflächen der Hauptaxe, die auch für sie die doppelten Flügelflächen enthalten. Die einer Art angehörigen sind $|\cong|$ und ihre Anzahl ist $2p$, indem in jeder der $2p$ doppelten Flügelflächen nur einer von jeder Art liegt. Die Gesammtheit 2fach 1gliedriger Strebestrahlen, die in jeder doppelten Flügelfläche der Hauptaxe liegt, zerfällt durch den 2fach 1gliedrigen Querstrahl in 2 Abtheilungen, deren eine der doppelten Flügelfläche erster Art für den einen

Hauptstrahl, die andere der doppelten Flügelfläche zweiter Art für den andern Hauptstrahl angehört. Die Anzahl von Arten für jede Abtheilung ist gleich der Menge von Strahlen, die ein rechter Winkel fasst.

6) Die übrigen *Strebestrahlen*, welche 1fach 1gliedrig sind. Nur eine solche Flügelfläche der Hauptaxe, welche durch einen 1fach 2gliedrigen Querstrahl geht, enthält zwei gleichwerthige 1fach 1gliedrige Strebestrahlen, und zwar ebenbildliche; jede andere einfache Flügelfläche der Hauptaxe aber enthält keine [**49**] 2gleichwerthige solche Strahlen. Die Anzahl in Beziehung zu einem Hauptstrahle ebenbildlicher 1fach 1gliedriger Strebestrahlen jeder Art ist $= p$; in Beziehung zum ganzen Körper einander ebenbildlich sind je $2p$ solcher Strahlen, die sich zu $2p$ andern ihnen gleichwerthigen gegenbildlich verhalten, so dass die Anzahl 1fach 1gliedriger Strebestrahlen einer Art $= 2 \cdot 2p = 4p$ ist. Die Gesammtheit der in einer und derselben Hauptflügelfläche liegenden Strebestrahlen wird durch den in derselben Flügelfläche liegenden Querstrahl in 2 Abtheilungen gesondert, daher man auch im Allgemeinen die 1fach 1gliedrigen Strebestrahlen in 2 Abtheilungen theilt. Die Menge von Arten 1fach 1gliedriger Strebestrahlen beider Abtheilungen zusammengenommen ergiebt sich daher = der zweimal genommenen Menge von Strahlen, welche eine Ecke fasst, die von 2 rechten Winkeln und einem Winkel von $\frac{360}{4p}$ Graden gebildet ist, + der Menge von Strahlen, die ein rechter Winkel fasst.

Ist p eine gerade Zahl, so ist jede 2fach 1gliedrige Queraxe gleichstellig 2endig, jede 1fach 2gliedrige, so wie jede Queraxe ebenbildlich 2endig, jede in der durch die Hauptaxe und durch die 1fach 2gliedrige Queraxe gelegten Ebene liegende 1fach 1gliedrige Strebeaxe ist ebenbildlich gleichendig, jede andere Axe aber ungleichendig. Ist aber p ungerade, so ist jede Axe gleichendig, und zwar die 2gliedrige Queraxe gleichstellig 2endig, jede andere Axe aber gerenstellig 2endig, 2fach oder 1fach 1gliedrig.

Die Menge ebenbildlicher Stellungen jeder einzelnen Art bei senkrecht aufwärts gerichtetem $p$gliedrigem Hauptstrahle ist hier, weil die 2 Hauptstrahlen ebenbildlich sind, $= 2 \times p$; wenn einer der p ebenbildlichen 1fach 2gliedrigen Querstrahlen senkrecht aufwärts gerichtet ist, $= p \times 2$, und wieder, wenn irgend einer der $2p \cong$ (1fach oder 2fach) 1gliedrigen

Strahlen senkrecht aufwärts gerichtet ist, $= 2p \times 1$. Es ist aber $2 \times p = p \times 2 = 2p \times 1$.

IV. Die Hauptaxe sei gerenstellig 2endig 1fach $p$gliedrig, z. B.

Fig. 247 gerenstellig 2endig 1fach 1gliedrig
- 248 - 2 - 1 - 3 - .

Man hat in diesem Falle:

1) 2 gleichwerthige sich $|=|$, nicht $\cong$, verhaltende [50] 1fach $p$gliedrige *Hauptstrahlen* (die also keine doppelten Flügelflächen haben).

2) *Querstrahlen*, deren jeder 1*fach* 1*gliedrig* ist; je p sind in Beziehung zu einem Hauptstrahle $\cong$ und verhalten sich zu den p ihnen gleichwerthigen, die unter sich in Beziehung zum andern Hauptstrahle einander $\cong$ sind, in Beziehung zum ganzen Körper als gegenbildlich gleich. Die Anzahl Querstrahlen einer Art ist also $= 2p$, die Anzahl der Arten von Querstrahlen ist gleich der Menge von Strahlen, die ein Winkel von $\frac{360}{2p}$ Graden fasst, den einen der Schenkel dieses Winkels selbst dazu gezählt.

3) *Strebestrahlen*, deren jeder gleichfalls 1*fach* 1*gliedrig* ist. Die p einen, unter sich in Beziehung zu einem Hauptstrahle ebenbildlichen, verhalten sich zu den p andern, die mit ihnen zu derselben Art gehören (und unter sich in Beziehung zum andern Hauptstrahle einander $\cong$ sind), in Beziehung zum ganzen Körper als gegenbildlich gleich. Daher ist die Anzahl von Strebestrahlen einer Art $= 2p$. Die Menge der Arten von Strebestrahlen ist gleich dem Doppelten der Summe aus der Menge von Strahlen, die eine Ecke fasst, welche von 2 rechten Winkeln und einem Winkel von $\frac{360}{2p}$ Graden eingeschlossen ist, und der Menge von Strahlen, die ein rechter Winkel fasst.

Ist p eine gerade Zahl, so ist jede Queraxe ebenbildlich gleichendig, jede Strebeaxe aber ungleichendig. Ist aber p ungerade, so ist jede Axe gleichendig und zwar gleichendig gerenstellig.

Die Menge von ebenbildlichen Stellungen jeder einzelnen Art bei senkrecht aufwärts gerichteten Hauptstrahlen ist, da die beiden Hauptstrahlen nicht ebenbildlich sind, bloss

$= 1 \times p$. Da von sämmtlichen übrigen Strahlen stets nur je p einander $\cong$ sind und da jeder Strahl, der nicht Hauptstrahl ist, bloss 1gliedrig ist, so ist bei dem senkrechten Aufwärtsgerichtetsein von Quer- oder Strebestrahlen irgend einer Art die Anzahl ebenbildlicher Stellungen $= p \times 1$. Es ist $1 \times p = p \times 1$.

V. Die Hauptaxe sei ebenbildlich 2endig 1fach *p*gliedrig*), z. B.

[51] Fig. 249 *A*. ebenbildlich gleichendig 1fach 2gliedrig,
- 249 *B*. - - 1 - 3 - **).

Es sind dann vorhanden:

1) 2 ebenbildliche 1fach *p*gliedrige *Hauptstrahlen*,

2) p ebenbildliche 1fach 2gliedrige *Querstrahlen der ersten* und

3) p ebenbildliche 1fach 2gliedrige *Querstrahlen der zweiten Art*. Jeder 2gliedrige Querstrahl der ersten oder zweiten Art ist ein doppelter Strahl der ersten oder zweiten Art in der ebenen Figur, die der mittlere Horizontalschnitt bildet und welche, als solche, eine 2fach *p*gliedrige ist.

4) Jeder andere *Querstrahl* ist bloss 1fach 1gliedrig. Die p einen, in Beziehung zum einen Hauptstrahle einander ebenbildlichen, verhalten sich zu den ihnen gleichwerthigen in Beziehung zum andern Hauptstrahle einander ebenbildlichen p andern, wenn man sie in Beziehung zum ganzen Körper vergleicht, als ebenbildlich, während sie in Beziehung auf einerlei Flächenseite des als ebene Figur (d. h. ohne Rücksicht auf Bedeutung im Körper) betrachteten mittleren Querschnittes sich gegenbildlich verhalten. Die Anzahl 1gliedriger Querstrahlen einer Art ist also $= 2p$. Die Anzahl der Arten

---

*) Gestalten, denen solche Strahlensysteme entsprechen, sind von jeder Art zwei möglich, die sich zu einander gegenbildlich verhalten, [51] ohne ebenbildlich zu sein; dasselbe gilt daher auch von den Strahlensystemen selbst, die zwei solchen Gestalten angehören. Es ist keine Stellung für die eine Gestalt möglich, in der sie mit der ihr ähnlichen und gleichen congruirte.

**) [XI] Die Fig. 249 *B*. ist so mit Buchstaben bezeichnet, wie sie von den Mineralogen gewöhnlich bezeichnet zu werden pflegt. Soll sie aber als Beispiel einer ebenbildlich gleichendigen 1fach 3gliedrigen Gestalt dienen, so müssen am unteren Ende die Buchstaben *P* und *z* mit einander vertauscht werden, wenn sie am oberen Ende unverändert stehen bleiben.

solcher Strahlen ist = der Menge von Strahlen, die ein Winkel von $\frac{360}{2p}$ Graden fasst.

5) *Strebestrahlen;* sie sind 1*fach* 1*gliedrig*; je $2p$ gehören zu einerlei Art und sind in Beziehung zum ganzen Körper ebenbildlich, die p einen sind einander ebenbildlich in Beziehung zum einen, die p andern zum andern Hauptstrahle. Nur in denjenigen Hauptflügelflächen, in welchen 2gliedrige Querstrahlen liegen, sind auch zu beiden Seiten dieses Querstrahls gleichwerthige (namentlich ebenbildliche) Strebestrahlen befindlich. Die Anzahl von Arten der Strebestrahlen ist gleich der Menge von Strahlen, die eine Ecke fasst, welche 2 rechte Winkel und einen Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden hat, + der Menge von Strahlen, die ein rechter Winkel fasst.

[52] Ist p eine gerade Zahl, so sind die 1fach 2gliedrigen Queraxen sowohl als auch die 1fach 1gliedrigen ebenbildlich 2endig, die in eine durch die Hauptaxe und eine 2gliedrige Queraxe gelegte Ebene fallenden Strebeaxen sind ebenbildlich gleichendig, die übrigen aber ungleichendig. Ist p eine ungerade Zahl, so ist jede 1fach 2gliedrige Queraxe ungleichendig, jede auf eine 2gliedrige Queraxe senkrechte 1fach 1gliedrige Queraxe ist ebenbildlich gleichendig, jede andere Queraxe aber ist ungleichendig; jede in einer durch die Hauptaxe und durch eine ebenbildlich gleichendige Queraxe gelegten Ebene liegende Strebeaxe ist ebenbildlich gleichendig, jede andere Strebeaxe aber ist ungleichendig.

Die Menge der ebenbildlichen Stellungen für die senkrecht stehende Hauptaxe ist $= 2p$, weil die Hauptaxe aus 2 ebenbildlichen $p$gliedrigen Hauptstrahleu besteht; bei dem senkrechten Aufwärtsgerichtetsein eines 2gliedrigen Querstrahls $= p \times 2$, weil die Anzahl 2gliedriger Querstrahlen einer Art $= p$ ist, und endlich bei dem senkrechten Aufwärtsgerichtetsein eines 1gliedrigen Quer- und Strebestrahles $= 2p \times 1$, weil je $2p$ der 1gliedrigen Strahlen einander ebenbildlich sind und jeder nur eine einzige aufrechte Stellung jeder Art gestattet. Es ist $2 \times p = p \times 2 = 2p \times 1$.

VI. Die Hauptaxe sei ungleichendig 2fach $p$gliedrig, z. B.

Fig. 250 ungleichendig 2fach 2gliedrig,
- 251 - 2 - 3 - .

Es ist dann vorhanden:

1) Ein *oberer*
2) Ein *unterer* } *2fach pgliedriger Hauptstrahl*, beide Hauptstrahlen ungleichwerthig.

3) *p Querstrahlen der ersten Art*,
4) *p Querstrahlen der zweiten Art*, } welche strebestrahlenartig 2fach 1gliedrig sind. Die von einerlei Art sind also einander $|\cong|$.

5) Die übrigen *Querstrahlen*, deren jeder 1fach 1gliedrig ist; je *p* sind ebenbildlich und gleichwerthig mit *p* andern unter sich ebenbildlichen, zu denen sie sich gegenbildlich verhalten. Die Anzahl 1fach 1gliedriger Querstrahlen einer Art ist also [53] $= 2p$. Die Menge der Arten derselben ist gleich der Menge der Strahlen, die ein Winkel von $\frac{360}{2p}$ Graden fasst.

6) u. 7) Die *2fach 1gliedrigen Strebestrahlen, die* (gleich den 2fach 1gliedrigen Querstrahlen) *in die doppelten Hauptflügelflächen der ersten oder der zweiten Art* fallen. Die Anzahl $|\cong|$ 2fach 1gliedriger Strebestrahlen einer Art ist *p*, die Menge von Arten für jede dieser beiden Abtheilungen 2fach 1gliedriger Strebestrahlen ist gleich dem Doppelten der Anzahl von Strahlen, die ein rechter Winkel fasst.

8) Die *1fach 1gliedrigen Strebestrahlen*, von denen je *p* unter sich ebenbildliche mit *p* andern unter sich ebenbildlichen, die sich zu ihnen gegenbildlich verhalten, zu einerlei Art gehören, so dass die Anzahl solcher Strahlen einer Art $= 2p$ ist. Die Menge von Arten 1fach 1gliedriger Strebestrahlen ist gleich dem Doppelten der Menge von Strahlen, die eine Ecke fasst, welche von 2 rechten Winkeln und einem Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden gebildet ist.

Ist *p* eine gerade Zahl, so sind die 2fach 1gliedrigen Queraxen gleichstellig 2endig, die andern Queraxen aber sind ebenbildlich gleichendig. Die Strebeaxen sind ungleichendig. Ist *p* ungerade, so sind bloss die auf die 2fach 1gliedrigen (ungleichendigen) Queraxen senkrechten 1fach 1gliedrigen Queraxen gleichendig, und zwar gleichstellig 2endig, alle übrigen Axen aber sind ungleichendig.

Die Menge der ebenbildlichen Stellungen für eine Gestalt mit ungleichendiger 2fach *p*gliedriger Hauptaxe ist für den

senkrecht aufgerichteten Hauptstrahl der einen Art $= 1 \times p$, für einen senkrecht aufwärts gerichteten 1fach 1gliedrigen Strahl aber, weil immer nur p ebenbildliche Strahlen der Art vorhanden sind, $= p \times 1$; $p \times 1 = 1 \times p$..

VII. Die Hauptachse sei ungleichendig 1fach $p$gliedrig, z. B.

Fig. 252 *A*.	ungleichendig	1 fach	1 gliedrig,	
- 252 *B*.	-	1 -	2	-
- 252 *C*.	-	1 -	3	-
- 252 *D*.	-	1 -	4	- .

So hat man

1) einen *Hauptstrahl der ersten Art*,
2) einen *Hauptstrahl der zweiten Art*, } deren jeder ein 1fach $p$gliedriger, dem andern nicht gleichwerthiger Strahl ist.

[54] 3) *Querstrahlen*. Jeder Querstrahl ist 1fach 1gliedrig; je p eine Art ausmachende Querstrahlen sind einander ebenbildlich, die Anzahl der Arten von Querstrahlen ist = der Menge von Strahlen, die éin Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden fasst, den einen Schenkel dazu gezählt.

4) *Strebestrahlen*. Sie sind 1fach 1gliedrig; je p ebenbildliche machen eine Art aus. Die Anzahl der Arten ist gleich dem Doppelten der Menge von Strahlen, die eine Ecke fasst, welche von 2 rechten Winkeln und einem Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden eingeschlossen ist, + dem Doppelten der Menge von Strahlen, die ein rechter Winkel fasst.

Ist p gerade, so sind alle Queraxen ebenbildlich gleichendig, die Strebeaxen aber sind ungleichendig. Ist p ungerade, so sind alle Axen ungleichendige. Die Menge ebenbildlicher Stellungen einer solchen Gestalt ist so, wie bei ungleichendiger 2fach $p$gliedriger Hauptaxe.

Ist $p = \infty$, so fällt der Unterschied zwischen 2fach $p$gliedrig und 1fach $p$gliedrig weg, so wie auch die Unterschiede hinsichtlich der Art der Gleichendigkeit, und man hat nur

A. Gestalten mit gleichendiger und zwar gleichstellig 2endiger unendlichgliedriger Hauptaxe, z. B. Doppelkegel;

B. Gestalten mit ungleichendiger unendlichgliedriger Hauptaxe, z. B. einfacher Kegel.

3) Abhängigkeit der verschiedenen Axen eines hauptaxigen Axensystems von einander.

Wenn bei einer hauptaxigen Gestalt die Beschaffenheit der Axe selbst unbekannt, jedoch eine Axenart derselben gegeben ist, so dass man weiss:

1) wie viel gleichwerthige und dann auch wie viel ebenbildliche Axen dieser gegebenen Art im Körper vorhanden sind;

2) ob jede der gegebenen Axen 1fach oder 2fach $m$gliedrig sei, so dass m die gegebene Zahl 1 oder 2 bedeutet;

3) ob jede solche gegebene Axe entweder a) eine gleichendige sei, und dann in welcher Art die Gleichendigkeit bei ihr stattfinde, oder b) eine ungleichendige, und dann ob die zu suchende Hauptaxe selbst eine gleichendige sei oder nicht, so kann man den Charakter der Hauptaxe sowohl, als auch die [55] Beschaffenheit des ganzen Strahlen- oder Axensystems finden. Man wisse z. B., in einer hauptaxigen Gestalt seien vorhanden 3 gerenstellig 2endige 2fach 1gliedrige Axen, die demnach einander ebenbildlich sind, so giebt 1) die Anzahl 3 zu erkennen, dass man es nicht mit einer Hauptaxe zu thun habe; 2) dass diese Axen, wenn sie Queraxen sind, strebestrahlenartig 2fach 1gliedrig sein müssen; denn wären sie querstrahlenartig 2fach 1gliedrig und dennoch gerenstellig gleichendig, so müsste ihre Anzahl eine gerade sein, was die Zahl 3 nicht ist. Sie können also bloss aus 2fach 1gliedrigen Strebestrahlen oder aus strebestrahlenartigen 2fach 1gliedrigen Querstrahlen bestehen. Daraus folgt dann wieder, dass jeder der beiden Hauptstrahlen 3 doppelte Flügelflächen der 1sten und 3 doppelte Flügelflächen der 2ten Art haben müsse, und zuletzt, dass die Hauptaxe eine 2fach 3gliedrige gerenstellig gleichendige sein müsse.

4) Vereinigung der hauptaxigen Strahlensysteme in höhere Abtheilungen.

Begriff der 1- und $m$maassigen Systeme. Abgekürzte Namen der hauptaxigen Strahlensysteme.

Berücksichtigt man die Anzahl gleichwerthiger Axen oder Axen von einer Art und nennt man diese im Allgemeinen x,

so ist leicht einzusehen, dass in jedem Strahlensysteme wenigstens 2 Arten von Queraxen vorkommen müssen, für welche x den kleinsten Werth hat, der in dem fraglichen Systeme für andere, als die einheitliche Hauptaxe möglich ist. Es sei dieser kleinste Werth von $x = m$, so ist in jedem hauptaxigen Systeme der Werth von x:

für die Hauptaxe $= 1$,
für die Queraxe erster Art $= m$,
für die Queraxe zweiter Art $= m$,
für die übrigen Queraxen $= 2\,m$ oder $= m$,
für die Strebeaxen $= m$ oder $2\,m$ oder $4\,m$.

Ist bloss für 2 Arten von Queraxen $x = m$, so sind diese Queraxen von den sämmtlichen übrigen Axen unterschieden, hierdurch sowohl, als auch durch höhere, ihnen zustehende Regelmässigkeit, und es ist *nothwendig*, sie als vorzüglich wichtige Axen zu betrachten und vor den andern minder wichtigen Axen auszuzeichnen. Ist für alle Arten von Queraxen $x = m$, so ist es möglich, zwei von diesen Arten als die wichtigern zu betrachten, gleich wie es möglich war, unter mehreren einheitlichen [56] Axen *eine* als die Hauptaxe anzusehen. Auch leuchtet es von selbst ein, dass, wenn zwei Strahlensysteme gegeben sind, die mit einander verglichen werden sollen, und für beide der Werth von m gleich gross ist, im einen Systeme aber die Queraxen erster und zweiter Art *nothwendige*, im andern dagegen zu *wählende* sind, man in diesem die Lage der beiden Arten von Queraxen gegen einander so zu wählen habe, wie sie in jenem gegeben ist. Nennt man daher die Queraxen erster und zweiter Art die *Messungsqueraxen* (Querdimensionsaxen) und fasst man diese beiden Arten von Axen und die Hauptaxe unter dem gemeinschaftlichen Namen *Messungsaxen* zusammen, so sieht man leicht ein, dass die hauptaxigen Strahlensysteme zu mehreren in Familien vereint werden können, so dass diejenigen, welche einerlei Anzahl von Messungsqueraxen einer Art*) besitzen, zu einer und derselben Familie gehören und 1- und $m$maassige Gestalten benannt werden können.

Wenn m ungerade ist, so bildet je eine Queraxe zweiter Art mit einer solchen erster Art einen rechten Winkel; ist aber m gerade, so bilden zwei gleichnamige Qneraxen rechte

*) Folglich auch der andern Art.

Winkel mit einander; je eine solche erster Art aber bildet mit einer der 2ten einen halben rechten Winkel. Der Werth von p ist entweder $= m$ oder $= 2\,m$.

Als 1- und 3maassige Strahlensysteme sind zu betrachten:

1)	das [gleichstellig 2endige 2fach]	6gliedrige	System
2)	das [gleichstellig 2endige] 1fach	6	-	-
3)	das ebenbildlich 2endige [1fach]	6	-	-
4)	das ungleichendige [2fach]	6	-	-
5)	das ungleichendige 1fach	6	-	-
6)	das gleichstellig 2endige 2fach	3	-	-
7)	das gleichstellig 2endige 1fach	3	-	-
8)	das [gerenstellig 2endige 2fach]	3	-	-
9)	das [gerenstellig 2endige] 1fach	3	-	-
10)	das ebenbildlich 2endige 1fach	3	-	-
11)	das ungleichendige [2fach]	3	-	-
12)	das ungleichendige 1fach	3	-	- .

Setzt man hier statt 3gliedrig den allgemeinen Ausdruck $(2n+1)$gliedrig und statt 6gliedrig $2\,(2n+1)$gliedrig, so hat man die 12 Strahlensysteme, welche 1- und $m$maassig sind, wenn m eine [57] ungerade Zahl $= (2n+1)$ ist. Für $n = 0$ oder $m = 2n+1 = 1$ hat man die 1- und 1maassigen Systeme*).

Als 1- und 2maassige Strahlensysteme sind zu betrachten:

1)	das [gleichstellig 2endige 2fach]	4gliedrige	System
2)	das [gleichstellig 2endige] 1fach	4	-	-
3)	das ebenbildlich 2endige [1fach]	4	-	-
4)	das ungleichendige [2fach]	4	-	-

*) Von den 1- und 1maassigen Systemen ist das 2te mit dem 8ten, das 4te mit dem 6ten, das 5te mit dem 10ten, das 7te mit dem 11ten so verwandt, dass das eine an die Stelle des andern gesetzt werden könnte, wenn es erlaubt wäre, die Hauptaxe des einen mit einer andern einheitlichen Axe desselben zu vertauschen. Dass dieses jedoch nicht überall erlaubt sei, geht daraus hervor, dass die menschliche Gestalt, wenn man die rechte und linke Hälfte als gleichwerthig betrachtet und von den Verschiedenheiten im inneren Baue absieht, einem Strahlensysteme entspricht, welches eine ungleichendige 2fach 1gliedrige Hauptaxe hat, welche von jedem unmittelbar für die richtige wird angesprochen werden, obgleich andere einheitliche Axen vorhanden sind, welche rein mathematisch genommen, eben so gut zur Hauptaxe gewählt werden könnten, als diese.

5) das ungleichendige 1fach 4gliedrige System
6) das gerenstellig 2endige [2fach] 2 - -
7) das gerenstellig 2endige 1fach 2 - - .

Setzt man statt des Ausdrucks 2gliedrig den allgemeineren $2n$gliedrig und statt 4gliedrig den Ausdruck $4n$gliedrig, so hat man die 7 Strahlensysteme, welche 1- und $m$maassig sind, wenn m eine gerade Zahl $= 2n$ ist. Dass hier von den 2gliedrigen ($2n$gliedrigen) nur die gerenstellig 2endigen vorkommen und also hier nur 7 Systeme aufgezählt werden, während, wenn m ungerade ist, die Anzahl 12 beträgt, liegt darin, dass bei den übrigen 2gliedrigen Strahlensystemen nur je eine Messungsaxe einer Art vorhanden ist, und nicht 2 einander gleichwerthige Messungsaxen erster Art, und 2 gleichwerthige solche zweiter Art, oder allgemein, dass bei den übrigen $2n$gliedrigen Strahlensystemen nur n gleichwerthige Queraxen erster Art und n solche gleichwerthige Queraxen zweiter Art vorhanden sind*).

[58] Da es von Nutzen sein dürfte, kürzere Benennungen für die wichtigsten Strahlensysteme zu haben, so werde festgesetzt, dass, wenn der Werth von p bekannt ist, man also weiss, ob p gerade ist oder ungerade, folglich auch bekannt ist, ob die gleichendigen Axen vorherrschen oder die ungleichendigen, diejenigen Systeme, bei denen die gleichendigen Axen vorherrschen, als die wichtigeren angesehen werden und eine abgekürztere Benennung erhalten sollen. Dieses kann dadurch geschehen, dass man den Theil der Benennung, welcher bei der hier beispielsweise stattgefundenen Aufzählung der 1- und 3maassigen Gestalten und der 1- und 2maassigen in [ ] eingeschlossen ist, vernachlässigt. Dieselbe Art der Abkürzung, wie bei den 1- und 3maassigen Systemen, findet natürlich statt bei allen 1- und $(2n + 1)$maassigen, folglich auch bei den 1- und 1maassigen Systemen, und eben so tritt die bei den 1- und 2maassigen Systemen angedeutete Abkürzung für alle 1- und $2n$maassige Systeme ein.

*) Dass dessen ungeachtet Verhältnisse stattfinden können, gemäss welchen ein gleichstellig 2endiges 2fach 2gliedriges Strahlensystem, z. B. in sehr naher Verwandtschaft stehen könne mit einem gleichstellig 2endigen 2fach 4gliedrigen, ist von selbst einleuchtend, auch wird dieses in der Folge berührt werden.

V. Lehre von den hauptaxigen Gestalten.

1) Von den Flächen, Kanten und Ecken derselben im Allgemeinen.

Wenn einer Gestalt ein Strahlensystem entspricht, so kann man umgekehrt die Begrenzungsflächen und die Kanten der Gestalt nach den Strahlen jenes Systems benennen, die auf ihnen senkrecht sind, so wie die Ecken nach den den Eckpunkt treffenden Strahlen. Wegen der Begrenzungsflächen ist weitere Erläuterung überflüssig, da von ihnen im Wesentlichen dasjenige gilt, was von den Schnittebenen in einem Körper gesagt wurde. Die Kanten anlangend, so ist in ihnen ein Paar von Richtungen in der Linie der Kante selbst gegeben, welche als abgesondert betrachtet werden müssen. Die Kanten können daher bloss sein

1) *2fach 2gliedrige Kanten*, wenn auf ihnen ein 2fach 2gliedriger Strahl des Strahlensystems, das dem Körper entspricht, senkrecht ist. Man kann von einer solchen Kante sagen, sie sei ebenbildlich gegenbildlich gleichendig und ebenbildlich gegenbildlich gleichseitig.

2) *1fach 2gliedrige Kanten*, die senkrecht auf 1fach 2gliedrigen solchen Strahlen sind. Dergleichen Kanten sind ebenbildlich gleichendig, ebenbildlich gleichseitig.

3) *2fach 1gliedrige Kanten*, die senkrecht auf 2fach 1gliedrigen solchen Strahlen sind; sie zerfallen in

[59] a) *ungleichendige* oder, was dasselbe ist, gegenbildlich *gleichseitige 2fach. 1gliedrige Kanten* und in

b) gegenbildlich *gleichendige* oder, was damit einerlei ist, *ungleichseitige 2fach 1gliedrige Kanten.*

Bei jenen geht die Ebene der doppelten Flügelflächen des 2fach 1gliedrigen Strahles im Körper, auf welchen die Kante senkrecht ist, durch die Kante selbst, so dass diese in ihr liegt; bei diesen ist die Kante senkrecht auf jener Ebene.

4) *1fach 1gliedrige Kanten*, senkrecht auf 1fach 1gliedrigen Strahlen des dem Körper entsprechenden Strahlensystems; sie sind weder gleichendig noch gleichseitig.

Eine senkrecht stehende Säule mit regelmässig sechsseitiger oberer und unterer Horizontalfläche hat 6 verticale Kanten, welche dem Falle 1), und 12 horizontale Kanten,

welche dem Falle 3b) entsprechen. Ein Parallelepipedon, welches von 6 gleichen und ähnlichen Rauten umschlossen ist, hat in Bezug auf das ihm entsprechende Strahlensystem 6 Kanten, die dem Falle 2), und 6 Kanten, die dem Falle 3a) entsprechen. Bei einem von vier ungleichen ungleichschenkligen Dreiecken umschlossenen Körper ist jede der Kanten eine 1fach 1gliedrige.

Eine jede Ecke ist aus denselben Gründen im Allgemeinen entweder eine 1fach *p*gliedrige oder eine 2fach *p*gliedrige. Die 1fach *p*gliedrige ist wieder eine *p*- oder $2 \times p$- oder $3 \times p$- oder $n \times p$kantige, je nachdem in ihr 1 oder 2 oder 3... oder *n* verschiedene *p*heiten von Kanten zusammentreffen, von denen die zu jeder *p*heit gehörigen einander ebenbildlich sind. Die 2fach *p*gliedrige Ecke ist eine *p*kantige oder $2 \times p$kantige oder *t*kantige u. s. w., allgemein eine $n \times t$kantige oder $n \times t$ und *p*kantige oder $n \times t$ und $2 \times p$kantige; Ausdrücke, welche, wenn man statt des Beiworts *kantige* setzt das Wort *winklige*, den Schnittebenen senkrecht auf den Strahl des Strahlensystems, dem jene Ecke angehört, entsprechen, wenn sämmtliche Kanten der Ecke von der Schnittebene getroffen werden. Der Buchstabe *t* bedeutet eine Zahl $= 2p$ von Kanten, wovon die *p* einen unter sich ebenbildlich und zu den *p* andern, ihnen gleichwerthigen, gegenbildlich sind. Die Zahl *n* bedeutet die Menge solcher verschiedenwerthiger *t*heiten, der Buchstabe *p* in obiger Formel aber bezieht sich auf die Menge von ebenbildlich gegenbildlichen Kanten. Kommt der Ausdruck $2 \times p$ vor, so sind 2 verschiedenwerthige *p*heiten solcher Kanten an der Ecke zu finden. [60] Die wichtigsten 2fach *p*gliedrigen Ecken sind die *p*kantigen und die $2 \times p$kantigen. Von den 2fach 2gliedrigen insbesondere sind wichtig die 2×2kantigen, die 4kantigen u. s. w.; von den 2fach 1gliedrigen die 2- und 1kantigen, die 2- und 2×1kantigen, die 2×2kantigen, die 2×2- und 1kantigen, die 2×2- und 2×1kantigen u. s. w.

Jede Fläche einer hauptaxigen Gestalt aber ist entweder senkrecht auf einen Hauptstrahl, und dann heisst sie Horizontalfläche oder *Tafelfläche*, oder senkrecht auf einen Querstrahl, und dann heisst sie Verticalfläche oder *Säulenfläche*, *Seitenfläche*, *Seitenwand*, oder endlich senkrecht auf einen Strebestrahl, und dann heisst sie *Strebefläche* oder *schiefe Wand*.

Eine Ecke, in deren Eckpunkte die Hauptaxe sich endigt, heisst ein *Scheitel* der Gestalt (*vertex*, Polecke, Spitze u. s. w.). Eine Gestalt hat also höchstens 2 Scheitel.

Kanten, die im Scheitel zusammenlaufen, heissen *Scheitelkanten* (*crura verticis*, Polkanten). Kanten, welche die Flächen des einen Scheitels von denen des andern trennen, heissen *Mittelkanten* (*acies mediae*). Bildet die Gesammtheit der Mittelkanten mit ihren Enden aneinanderstossend einen in sich selbst zusammenlaufenden Kantenring, so heisst dieser, gleichviel ob jene Kanten in einerlei Ebene liegen oder ob sie ein Zickzack bilden, *Rand* der Gestalt (*margo*), und die Kanten, die ihn bilden, heissen *Randkanten* (*acies marginales*). Ecken, die dem Rande anliegen, heissen *Randecken* (*acumina marginalia*). Ecken, die den Mittelkanten anliegen, heissen *Mittelecken* (*acumina media*). Kanten parallel der Hauptaxe heissen *Seitenkanten* oder *Säulenkanten* (*acies laterales*). Trifft ein Ende der Hauptaxe in eine einzige Kante, so heisst diese Kante *Gipfelkante* (*acies culminalis*).

2) Gestalten, die einem gegebenen hauptaxigen Strahlensysteme entsprechen.

Bisher wurde (zum Behuf der Auffindung sämmtlicher denkbarer Arten von hauptaxigen Strahlensystemen) die Gestalt als das Gegebene betrachtet und für sie dasjenige körperliche Strahlensystem aufgesucht, welches ihr entspricht, wenn man alles, was an ihr möglicher Weise als gleichwerthig betrachtet werden kann, wirklich als gleichwerthig betrachtet. Es wurde daher für jede hauptaxige Gestalt ein *bestimmtes Strahlensystem* [61] aufgefunden, *das ihr entspricht.* Geht man aber umgekehrt von einem gegebenen Strahlensysteme aus und sucht die ihm möglicher Weise entsprechenden Gestalten zu finden, so ist einleuchtend, dass innerhalb bestimmter Grenzen eine und dieselbe Gestalt verschiedenen Strahlensystemen entsprechen könne; denn es ist hier nun nicht mehr bloss die Rede von der Gleichwerthigkeit der Theile eines Körpers an sich, sondern von dieser Gleichwerthigkeit in Beziehung zu dem bestimmten gegebenen Strahlensysteme, welche letztere Gleichwerthigkeit die erste bei den betreffenden Theilen voraussetzt, während nicht umgekehrt Theile eines Körpers, die an sich gleichwerthig sind, auch sich als gleichwerthig

verhalten müssen in Beziehung zu dem gegebenen Strahlensysteme *).

Man erhält aber Gestalten, die einem gegebenen Strahlensysteme entsprechen, wenn man Ebenen so um den Mittelpunkt desselben herumlegt, dass, wenn eine solche Ebene einen bestimmten Strahl in einer bestimmten Entfernung vom Strahlenmittelpunkte so schneidet, dass sie auf diesem Strahle senkrecht ist, auch jeder andere, dem erwähnten gleichwerthige, Strahl eben so durch eine Ebene geschnitten wird. Die Menge von Strahlenarten, welche auf solche Weise als Normalen von Begrenzungsebenen auftreten, bedingt daher die Menge von Flächenarten, welche eine Gestalt haben kann; die Menge von Strahlen einer Art bestimmt die Anzahl der gleichwerthigen Begrenzungsflächen [62] der Gestalt, auf deren Flächen jene Strahlen senkrecht sind.

Einfache und zusammengesetzte Gestalten.

Jede einem gegebenen Strahlensysteme entsprechende Gestalt ist entweder eine *einfache* (*forma simplex*), oder eine *zusammengesetzte* (*f. composita*, Combinationsgestalt), je nachdem sie begrenzt ist von Flächen *einer* Art**), d. h. von solchen, deren Normalen gleich lange Strahlen von einerlei

---

*) Denn gleichwie man die Zahl 6 betrachten kann nicht bloss als ein Glied der sechsheitlichen Zahlenreihe 6, 12, 18, 24 ..., deren Hauptcharakter sie bedingt, sondern auch als solches der dreiheitlichen 3, 6, 9, 12 ..., ferner der zweiheitlichen 2, 4, 6, 8 ... und endlich der einheitlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ..., wobei sie als ein bedingtes Glied bloss erscheint, während man nicht umgekehrt die Zahl 3 oder 4 u. s. w. als Glied der sechsheitlichen Zahlenreihe betrachten kann, so kann man eine Gestalt, die ihrer Beschaffenheit nach als eine solche mit 6gliedriger Hauptaxe zu betrachten ist, auch ansehen als eine solche mit 3gliedriger oder 2gliedriger oder 1gliedriger Hauptaxe, nicht aber umgekehrt. Gleichwie ferner die 2fach $p$gliedrige ebene Figur sich als eine 1fach $p$gliedrige betrachten liess, eben so lässt sich auch eine Gestalt mit 2fach $p$gliedriger Hauptaxe ansehen als eine mit 1fach $p$gliedriger Axe. Die verschiedenen Arten des Gleichendigseins der Hauptaxe sind ebenfalls nur Arten des Bestehens aus zwei gleichnamigen, nicht nothwendig gleichwerthigen Strahlen.

**) Es werden hierbei nicht bloss ringsum *endlich* begrenzte, sondern auch solche Raumtheile, die in einer oder in mehreren Richtungen eine unendliche Ausdehnung haben, selbst wenn sie nur nach einer *einzigen* Richtung hin (d. h. durch eine einzige Ebene) begrenzt sind, als einfache Gestalten betrachtet.

Eine Ecke, in deren Eckpunkte die Hauptaxe sich endigt, heisst ein *Scheitel* der Gestalt (*vertex*, Polecke, Spitze u. s. w.). Eine Gestalt hat also höchstens 2 Scheitel.

Kanten, die im Scheitel zusammenlaufen, heissen *Scheitelkanten* (*crura verticis*, Polkanten). Kanten, welche die Flächen des einen Scheitels von denen des andern trennen, heissen *Mittelkanten* (*acies mediae*). Bildet die Gesammtheit der Mittelkanten mit ihren Enden aneinanderstossend einen in sich selbst zusammenlaufenden Kantenring, so heisst dieser, gleichviel ob jene Kanten in einerlei Ebene liegen oder ob sie ein Zickzack bilden, *Rand* der Gestalt (*margo*), und die Kanten, die ihn bilden, heissen *Randkanten* (*acies marginales*). Ecken, die dem Rande anliegen, heissen *Randecken* (*acumina marginalia*). Ecken, die den Mittelkanten anliegen, heissen *Mittelecken* (*acumina media*). Kanten parallel der Hauptaxe heissen *Seitenkanten* oder *Säulenkanten* (*acies laterales*). Trifft ein Ende der Hauptaxe in eine einzige Kante, so heisst diese Kante *Gipfelkante* (*acies culminalis*).

2) Gestalten, die einem gegebenen hauptaxigen Strahlensysteme entsprechen.

Bisher wurde (zum Behuf der Auffindung sämmtlicher denkbarer Arten von hauptaxigen Strahlensystemen) die Gestalt als das Gegebene betrachtet und für sie dasjenige körperliche Strahlensystem aufgesucht, welches ihr entspricht, wenn man alles, was an ihr möglicher Weise als gleichwerthig betrachtet werden kann, wirklich als gleichwerthig betrachtet. Es wurde daher für jede hauptaxige Gestalt ein *bestimmtes Strahlensystem* [61] aufgefunden, *das ihr entspricht*. Geht man aber umgekehrt von einem gegebenen Strahlensysteme aus und sucht die ihm möglicher Weise entsprechenden Gestalten zu finden, so ist einleuchtend, dass innerhalb bestimmter Grenzen eine und dieselbe Gestalt verschiedenen Strahlensystemen entsprechen könne; denn es ist hier nun nicht mehr bloss die Rede von der Gleichwerthigkeit der Theile eines Körpers an sich, sondern von dieser Gleichwerthigkeit in Beziehung zu dem bestimmten gegebenen Strahlensysteme, welche letztere Gleichwerthigkeit die erste bei den betreffenden Theilen voraussetzt, während nicht umgekehrt Theile eines Körpers, die an sich gleichwerthig sind, auch sich als gleichwerthig

verhalten müssen in Beziehung zu dem gegebenen Strahlensysteme *).

Man erhält aber Gestalten, die einem gegebenen Strahlensysteme entsprechen, wenn man Ebenen so um den Mittelpunkt desselben herumlegt, dass, wenn eine solche Ebene einen bestimmten Strahl in einer bestimmten Entfernung vom Strahlenmittelpunkte so schneidet, dass sie auf diesem Strahle senkrecht ist, auch jeder andere, dem erwähnten gleichwerthige, Strahl eben so durch eine Ebene geschnitten wird. Die Menge von Strahlenarten, welche auf solche Weise als Normalen von Begrenzungsebenen auftreten, bedingt daher die Menge von Flächenarten, welche eine Gestalt haben kann; die Menge von Strahlen einer Art bestimmt die Anzahl der gleichwerthigen Begrenzungsflächen [62] der Gestalt, auf deren Flächen jene Strahlen senkrecht sind.

Einfache und zusammengesetzte Gestalten.

Jede einem gegebenen Strahlensysteme entsprechende Gestalt ist entweder eine *einfache* (*forma simplex*), oder eine *zusammengesetzte* (*f. composita*, Combinationsgestalt), je nachdem sie begrenzt ist von Flächen *einer* Art**), d. h. von solchen, deren Normalen gleich lange Strahlen von einerlei

---

*) Denn gleichwie man die Zahl 6 betrachten kann nicht bloss als ein Glied der sechsheitlichen Zahlenreihe 6, 12, 18, 24 ..., deren Hauptcharakter sie bedingt, sondern auch als solches der dreiheitlichen 3, 6, 9, 12 ..., ferner der zweiheitlichen 2, 4, 6, 8 ... und endlich der einheitlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ..., wobei sie als ein bedingtes Glied bloss erscheint, während man nicht umgekehrt die Zahl 3 oder 4 u. s. w. als Glied der sechsheitlichen Zahlenreihe betrachten kann, so kann man eine Gestalt, die ihrer Beschaffenheit nach als eine solche mit 6gliedriger Hauptaxe zu betrachten ist, auch ansehen als eine solche mit 3gliedriger oder 2gliedriger oder 1gliedriger Hauptaxe, nicht aber umgekehrt. Gleichwie ferner die 2fach $p$gliedrige ebene Figur sich als eine 1fach $p$gliedrige betrachten liess, eben so lässt sich auch eine Gestalt mit 2fach $p$gliedriger Hauptaxe ansehen als eine mit 1fach $p$gliedriger Axe. Die verschiedenen Arten des Gleichendigseins der Hauptaxe sind ebenfalls nur Arten des Bestehens aus zwei gleichnamigen, nicht nothwendig gleichwerthigen Strahlen.

**) Es werden hierbei nicht bloss ringsum *endlich* begrenzte, sondern auch solche Raumtheile, die in einer oder in mehreren Richtungen eine unendliche Ausdehnung haben, selbst wenn sie nur nach einer *einzigen* Richtung hin (d. h. durch eine einzige Ebene) begrenzt sind, als einfache Gestalten betrachtet.

Art in dem gegebenen Strahlensysteme sind, oder von Flächen verschiedenen Werthes.

Um aus einer zusammengesetzten Gestalt eine einzelne der in ihr enthaltenen einfachen Gestalten zu *entwickeln*, verlängert man die Flächen einer Art so weit, bis sie allein einen Raum begrenzen, der eine dem gegebenen Strahlensysteme entsprechende einfache Gestalt darstellt. Auf solche Weise kann man nach und nach alle einfachen Gestalten finden, in welche, durch diese Untersuchungsart, eine gegebene zusammengesetzte Gestalt *zerlegt* werden kann. — Meist erhält man bei dem Versuche, diejenige dem gegebenen Strahlensystem entsprechende einfache Gestalt zu entwickeln, welche von Flächen einer bestimmten Art gebildet wird, statt einer, mehrere einfache Gestalten, die dieser Bedingung genügen, und es muss dann bekannt sein, welche von ihnen die zu entwickelnde sei. In der Regel pflegt man von den einander umschliessenden einfachen Gestalten, die so erhalten werden, zunächst die innere aufzufassen. — Einfache Gestalten, die nicht ringsum *endlich* begrenzt sind, kann man sich auf eine zweckmässige Weise nur dadurch versinnlichen, dass man sie aus zusammengesetzten Gestalten durch Zerlegung entwickelt.

Tafelflächner, Seitenwandner, Schiefwandner.

Was nun zunächst die einfachen hauptaxigen Gestalten angeht, so ist jede derselben entweder ein *Tafelflächner* (*polepipedum*), oder ein *Seitenwandner* (*orthepipedum*), oder ein *Schiefwandner* (*clinepipedum*); und es ist einleuchtend, dass kein Tafelflächner und kein Seitenwandner und dass auch nicht *jeder* Schiefwandner eine ringsum *endlich* begrenzte Gestalt sei.

[63] Da Winkel von 0° oder 90° gleichfalls Winkel sind, so ist einleuchtend, dass das, was im Allgemeinen für einen Strebestrahl gilt, der mit der Hauptaxe einen Winkel $= x$ bildet, mit der entsprechenden Veränderung auch gelten müsse für den Werth von $x = 0°$ oder $= 90°$, d. h. für einen Hauptstrahl oder Querstrahl. Die schiefwandigen Gestalten sind sonach die allgemeineren in jedem Systeme, die Tafelflächner und Seitenflächner aber sind nur als besondere Fälle zu betrachten. Da, wo Strebestrahlen vorkommen, die 2fach 1gliedrig sind, neben solchen, die 1fach 1gliedrig sind, werden aus gleichen Gründen Gestalten, deren Flächen senkrecht zu

2fach 1gliedrigen Strebestrahlen sind, als bestimmte Varietäten solcher Gestalten betrachtet werden können, deren Flächen senkrecht auf 1fach 1gliedrigen Strebestrahlen stehen.

3) Gestalten der einzelnen hauptaxigen Systeme.

I. Einfache Gestalten mit gleichstellig 2endiger 2fach *p*gliedriger Hauptaxe;

gleichstellig 2endige 2fach *p*gliedrige Gestalten.

Es liegen in jeder hier möglichen Hauptflügelfläche je 2 gleichwerthige Strebestrahlen so, dass der Querstrahl den Winkel, den sie bilden, halbirt. Es sei aa' die Hauptaxe, Fig. 253.
cr ein Querstrahl, die Ebene durch rc und aa' folglich eine Hauptflügelfläche, cp und cp' seien zwei in ihr liegende gleichlange, gleichwerthige gegebene Strahlen, ar sei in p senkrecht auf cp, so wird durch ar eine auf cp senkrechte Ebene gelegt werden können und ebenso durch $a'r$ eine auf cp' senkrechte. Diese beiden Ebenen schneiden sich mit ara' in dem Punkte r so, dass sie dort Ecken bilden, die 2 rechte Kanten ra und ra' haben. Die 3te Kante steht sonach senkrecht auf der Ebene der beiden rechten Kanten, d. h. auf ara', ist also eine horizontal liegende Kante, wenn ara' eine Verticalebene ist. Diese Querkante ist auch senkrecht auf dem Querstrahle cr.

Es sei nun zuerst cr ein Querstrahl der ersten Art, so sind p dergleichen Strahlen vorhanden; es entsteht daher eine Anzahl $= p$ von Querkanten, die im mittleren Querschnitte liegen. Ist $p = 3$ oder grösser, so ist die von p solchen Kanten umschlossene ebene Figur im mittleren Querschnitte eine geschlossene und zwar ein regelmässiges $p$seit. Somit kann man sagen: die fragliche Gestalt bilde einen in der mittleren Horizontalebene liegenden Rand, einen *ebenen Rand* um die Hauptaxe, sie sei ein *Ebenrandner* (*dipyramis*, Doppelpyramide), und zwar, da [64] ihre t ($= 2p$) Flächen eben- Fig. 254
bildlich sind, ein $t$flächiger Ebenrandner (*dipyramis t. edrica*); z. B. 6flächiger Ebenrandner oder *dipyramis hexaedrica*, *A.*
8flächiger Ebenrandner oder *dipyramis octaedrica*, quadra- *B.*
tischer Achtflächner, quadratisches Oktaeder, gleichschenkliges Oktaeder, viergliedriges Oktaeder, gleichschenklig vierseitige Pyramide, tetragonale Pyramide, octaèdre à base carrée etc, 12flächiger Ebenrandner, *dipyramis dodecaedrica*, sechs- *C.*

seitige Doppelpyramide, Bipyramidaldodekaeder, dodecaèdre bipyramidal, sechsgliedrige Doppelpyramide, Dihexaeder, Quarzoide, gleichschenklige sechsseitige Pyramide, Dirhomboeder u. s. w.

Jeder *t*flächige Ebenrandner, als Gestalt an sich betrachtet, hat:

1) *p* obere und *p* untere $|\cong|$ sich verhaltende Flächen, welche 2fach 1gliedrige 2- und 1seitige Figuren oder Keilflächen sind;

2) 2 $|\cong|$ sich verhaltende Scheitel *a*, welche *p* kantige 2fach *p* gliedrige Ecken sind;

3) *p* $|\cong|$ sich verhaltende 2 $\times$ 2kantige 2fach 2gliedrige Randecken *e*;

4) *p* dem oberen und *p* dem unteren Scheitel angehörige $|\cong|$ *Scheitelkanten s*, welche gleichseitige ungleichendige 2fach 1gliedrige Kanten sind;

5) *p* *Randkanten r*, welche $|\cong|$ und 2fach 2gliedrige Kanten sind.

Wegen der gleichschenkligen Dreieckflächen kann man einen solchen Körper auch einen gleichschenkligen Ebenrandner, *dipyramis isosceloidea*, nennen, wenn man die Zahl der Flächen nicht anzugeben beabsichtigt. Die Hauptflügelflächen der ersten Art liegen hier so, dass sie auf den Randkanten in deren Halbirungspunkte senkrecht sind. Die Querstrahlen der 2ten Art, folglich auch die Hauptflügelflächen der 2ten Art, gehen durch die Randecken.

Flächen senkrecht auf Strebestrahlen in Hauptflügelflächen der 2ten Art liefern unter ähnlichen Bedingungen gleichfalls einen *t*flächigen Ebenrandner, und zwar einen solchen der 2ten Stellung, wenn man jenen als einen der ersten Stellung betrachtet und die Lage des Strahlensystems als unverändert sich denkt. Bei ihnen gehen die Querstrahlen der ersten Art durch die Randecken, folglich die der 2ten Art durch die Halbirungspunkte [65] der Randkanten. Ist ein *t*flächiger Ebenrandner einem 2fach *p*gliedrigen Strahlensysteme entsprechend gebildet, so ist auch umgekehrt das ihm entsprechende Strahlensystem ein 2fach *p*gliedriges, das mit jenem übereinstimmt. Denkt man sich eine Reihe von *t*flächigen Ebenrandnern von gleicher Stellung und von gleich grossem Rande, aber verschieden grosser Hauptaxe, so wird auch der Fall eintreten müssen, dass die Hauptaxe $= \infty$ ist, und man hat dann eine *p*flächige Säule *prisma p-edrum* (*p*seitige Säule),

z. B. 3flächige Säule (*prisma triedrum*, trigonales Prisma, dreiseitige Säule u. s. w.); 4flächige Säule (*prisma tetraedrum*, tetragonales Prisma, quadratische Säule u. s. w.); 6flächige Säule (*prisma hexaedrum*, hexagonales Prisma, sechsseitige Säule u. s. w.).

Die $p$flächige Säule, insofern sie eine gleichstellig 2endige 2fach $p$gliedrige Gestalt ist, hat p Seitenflächen, welche einander ebenbildlich gegenbildlich sind und die Bedeutung 2fach 2gliedriger Figuren haben, indem sie auf 2fach 2gliedrigen Querstrahlen der einen oder der andern Art senkrecht sind, eine Bedeutung, die namentlich dann erkennbar ist, wenn mit diesen Flächen der Säule noch andere Flächen zu einer ringsum endlich*) begrenzten gleichstellig 2endigen 2fach $p$gliedrigen Gestalt verbunden sind. Sie hat ferner p Seitenkanten, welche einander $|\cong|$ sind und die Bedeutung 2fach 2gliedriger Kanten haben (indem sie auf 2fach 2gliedrigen Strahlen senkrecht sind). Auch dieser Charakter der Seitenkanten spricht sich an zusammengesetzten Gestalten, an denen die Flächen einer solchen Säule vorkommen, aus.

Es sei ferner zweitens aa' die Hauptaxe, cr ein 2fach 1gliedriger Querstrahl, so ist die durch aa' und cr gehende Flügelfläche der Hauptaxe eine einfache. cp und cp' seien wieder zwei in ihr liegende gleichwerthige Strebestrahlen und ar so wie $a'r$ seien die darauf senkrechten Flächen, so ist ersichtlich, [66] dass auch hier Mittelkanten entstehen, die im mittleren Querschnitte liegen, und (da ihre Anzahl = der jener einfachen Hauptflügelflächen $= 2p = t$ ist) wenn $p = 2$ oder grösser, mithin $t = 4$ oder grösser ist, einen ebenen Rand bilden müssen, so dass auch die auf solche Weise entstehende Gestalt ein Ebenrandner (*dipyramis*) ist; aber die Anzahl seiner Flächen ist $= 2 \times t$, daher man ihn $2 \times t$*flächigen Ebenrandner* (*dipyramis di-t-edrica*, $t$seitige Doppelpyramide u. s. w.) am zweckmässigsten nennt; z. B. 2×4flächiger Ebenrandner, *dipyramis ditetraedrica*, rhombisches Oktaeder,

Fig. 253. Fig. 255A.

---

*) Jede Säule an sich ist nämlich in der Richtung der Enden der Hauptaxe unbegrenzt und wird bloss von Flächen anderer Art, als die Säulen oder Seitenflächen sind, in zusammengesetzten Gestalten begrenzt. Häufig jedoch wird die Säule als eine durch horizontale oder schiefe Endflächen begrenzte betrachtet und so die zusammengesetzte Gestalt nach der wichtigsten in ihr enthaltenen einfachen benannt, was in allen den Fällen, in welchen hierdurch keine Missverständnisse entstehen, erlaubt sein dürfte.

Oktaeder mit ungleichschenkligen, dreiseitigen Flächen, Doppelpyramiden mit rhombischer Basis u. s. w. (octaèdre à base rhombe);

Fig. 255*B.* 2 $\times$ 6flächiger Ebenrandner (*dipyramis dihexaedrica*);

C. 2 $\times$ 8flächiger Ebenrandner (*dipyramis dioctaedrica*, achtseitige Doppelpyramide, 4- und 4kantiges Dioktaeder, ungleichschenklige achtseitige Pyramide);

2 $\times$ 10flächiger Ebenrandner (*dipyramis didecaedrica*);

D. 2 $\times$ 12flächiger Ebenrandner (*dipyramis didodecaedrica*, 12seitige Doppelpyramide, Didodekaeder, Sechs- und Sechskantner, ungleichschenklige 12seitige Pyramide, doppelt 12seitige Pyramide).

Der Rand ist hier ein 2fach $p$gliedriges $t$seit (ein Lanzen-p-ling), das nur in dem einen Falle, wenn es gleichwinklig wird, seiner Form nach mit einem regelmässigen $t$seit übereinstimmt, ausserdem aber stets abwechselnd neben einander folgende grössere und kleinere Winkel hat, so dass von jeder der beiden Arten von Winkeln eine Anzahl $= p$ vorhanden ist. Jeder 2 $\times$ $t$flächige Ebenrandner hat sonach:

1) 2 $\times$ tFlächen P, welche 1fach 1gliedrige Figuren und zwar Dreiecke sind (die nur im Falle der Gleichwinkligkeit des Randes ihrer Form nach 2- und 1seite werden, wodurch die Gestalt das Ansehen eines $v$flächigen Ebenrandners erhält [wenn $v = 2t$ ist], ihrer Beziehung nach zu dem Strahlensysteme aber, von welchem ihre Bildung ausgehend gedacht worden, die Bedeutung eines 2 $\times$ $t$flächigen Ebenrandners behauptet). Die t einen sind unter sich $\cong$ und verhalten sich zu den t andern, die unter sich $\cong$ sind, $|=|$.

2) 2 Scheitel a, welche $|\cong|$ sind und die Bedeutung von 2 $\times$ $p$kantigen 2fach $p$gliedrigen Ecken haben.

3) p Randecken der ersten Art e und

[67] 4) p Randecken der zweiten Art ε. Die einer und derselben Art angehörigen sind $|\cong|$. Jede Randecke ist 2 $\times$ 2kantig 2fach 2gliedrig.

Die beiden Arten können in der Regel durch die Bezeichnung *spitzigere* oder *stumpfere* unterschieden werden, wobei jedoch stets die Stellung zu berücksichtigen ist, weil sowohl die der ersten als auch die der 2ten Art die stumpferen sein können.

5) 2 p *Scheitelkanten der ersten Art s.*

6) 2 p *Scheitelkanten der zweiten Art* σ, die man in der Regel durch die Benennungen schärfere und stumpfere unterscheiden kann. Die einer und derselben Art angehörigen

sind $|\cong|$. Jede Scheitelkante ist ungleichendig (oder gleichseitig) 2fach 1gliedrig. Von jeder Art gehören *p* einem und demselben Scheitel an.

7) 2*p* oder *t Randkanten r*, welche $|\cong|$ und ungleichendig (oder gleichseitig) 2fach 1gliedrig sind*). Die Querstrahlen der ersten Art gehen durch die Randecken der ersten Art, die der 2ten Art durch jene der 2ten Art. Je zwei in einer Randecke zusammenstossende Randkanten verhalten sich in Beziehung zu *einem* der beiden Hauptstrahlen als $|=|$, folglich sind in derselben Beziehung nur die *p* einen unter sich $\cong$ und zwischen je zwei in Beziehung zu einem und demselben Hauptstrahle $\cong$ sich verhaltenden Randkanten liegt immer eine, die auf dieselbe Weise dem andern Hauptstrahle angehört.

Verlängert man die *p* unter sich in Beziehung zu einem Hauptstrahle ebenbildlichen Randkanten, so bilden sie, wenn *p* grösser als 2 ist, ein regelmässiges *p*seit, und denkt man sich dabei zugleich mit jeder solchen Randkante auch die zwei Flächen, deren Durchschnittslinie sie ist, verlängert, bis die so verlängerten 2 *p* Flächen eine ringsum geschlossene Figur bilden, so ist diese ein *t*flächiger Ebenrandner, der aber in seiner Stellung dem gegebenen Strahlensysteme nicht entspricht, wenn die Hauptaxe ihre Bedeutung als 2fach *p*gliedrige gleichstellig 2endige nicht umwandeln soll in die einer 1fach *p*gliedrigen [68] gleichstellig 2endigen. Dieses Begrenztsein von Flächen zweier *t*flächiger Ebenrandner, die durch Verlängerung der entsprechenden Flächen desselben erzeugt werden können, erklärt die Benennung 2 $\times$ *t*flächiger Ebenrandner.

Die Beschaffenheit eines 2 $\times$ *t*flächigen Ebenrandners hängt ab von der Grösse eines der beiden gleichen Hauptstrahlen, von der Grösse eines Querstrahls der ersten und von der Grösse eines Querstrahls der zweiten Art, so aufgefasst, dass diese Strahlen vom Mittelpunkte des Strahlensystems anfangen und in den Ecken der Gestalt ihre äusseren Enden haben.

Denkt man sich die beiden Arten von Querstrahlen constant, aber den Hauptstrahl veränderlich, so ist einer der

---

*) Da die Flächen die Bedeutung ungleichschenkliger Dreiecke haben, so nennt man einen derartigen Körper, wenn man die Zahl seiner Flächen nicht angeben will, einen *ungleichschenkligen Ebenrandner* (*dipyramis trigonoidea*).

Werthe, die er erhalten kann, $= \infty$; der $2 \times t$**flächige** Ebenrandner wird dann eine *Säule* (in welcher die Anzahl der Seitenflächen $= t$ und der auf die Seitenkanten senkrechte Schnitt ein 2fach $p$gliedriges $t$seit ist), die man wegen der Eigenschaft, gemäss welcher sich aus ihr durch Verlängerung der abwechselnd genommenen Flächen 2 einzelne gleichwerthige $p$flächige Säulen entwickeln lassen, eine $2 \times$ *pflächige Säule* (*prisma di-p-edrum*, $2 \times p$seitige Säule) nennt; z. B. 2×2-flächige Säule (*prisma didiedrum*, rhombische Säule, Rhombenprisma u. s. w.); 2×3flächige Säule (*prisma ditriedrum*, ditrigonales Prisma, 2×3seitige Säule); 2×4flächige Säule (*prisma ditetraedrum*, ditetragonale Säule, 2×4seitige Säule); 2×6flächige Säule (*prisma dihexaedrum*, dihexagonales Prisma, 2×6seitige Säule), u. s. w.

Jede $2 \times p$flächige Säule, sofern sie eine gleichstellig 2endige 2fach $p$gliedrige Gestalt ist, hat, wenn sie nach beiden Enden hin als unbegrenzt gedacht wird, tSeitenflächen, welche der Bedeutung nach einander $|\cong|$ und zwar 2fach 1gliedrig sind. Auch hat sie pSeitenkanten einer ersten und pSeitenkanten einer 2ten Art, die in Hauptflügelflächen erster oder 2ter Art fallen und in der Regel durch die Benennungen schärfere oder stumpfere unterschieden werden können. Jede Seitenkante hat die Bedeutung einer 2fach 2gliedrigen Kante; die p Seitenkanten von einer Art sind demnach einander $|\cong|$.

Unter den möglichen Verhältnissen für die Längen der beiden Arten von Queraxen in einem $2 \times t$flächigen Ebenrandner ist von besonderer Wichtigkeit das der Gleichheit oder 1 : 1. Der $2 \times t$flächige Ebenrandner hat dann die Form des oben angeführten [69] $v$flächigen Ebenrandners, welcher seiner Bedeutung nach in Beziehung zu dem gegebenen Strahlensysteme mit gleichstellig 2endiger 2fach $p$gliedriger Hauptaxe als $2 \times t$flächiger Ebenrandner zu betrachten ist, während, wenn man ihn abgesondert betrachtet und das *ihm* entsprechende Strahlensystem aufsucht, dieses sich als ein solches mit gleichstellig 2endiger 2fach $t$gliedriger Hauptaxe zu erkennen giebt, indem bei dieser Gestalt jeder Querschnitt ein regelmässiges $t$seit ist. Er ist das Zwischenglied, welches die $2 \times t$flächigen Ebenrandner in 2 Abtheilungen trennt; die einen, bei denen das Verhältniss eines Querstrahls der 1sten Art zu einem solchen der 2ten Art kleiner als 1 : 1 ist, könnte man als solche der 1sten, und die andern, bei welchen

dieses Verhältniss grösser als 1 : 1 ist, als $2 \times t$flächige Ebenrandner der zweiten Abtheilung ansehen.

Tritt hier zugleich der Fall ein, dass der Hauptstrahl $= \infty$ ist, so hat die hier entstehende $2 \times p$ flächige Säule die Form einer t flächigen Säule. Denkt man sich z. B. in einer 2×2 flächigen Säule, deren Querschnitt bekanntlich eine Raute ist, die grössere der Diagonalen in diesem Schnitte constant, während die kleinere wächst, so wird diese einmal jener gleich werden müssen, ehe sie grösser wird, und wenn beide gleich sind, ist die Rhombe zum Quadrat, folglich die Säule mit rhombischem Querschnitte, d. h. die 2×2 flächige Säule, zu einer solchen mit quadratischem Querschnitte, d. h. zu einer 4 flächigen geworden, die aber in Beziehung zu dem gegebenen Strahlensysteme mit 2fach 2gliedriger Hauptaxe sich als eine 2×2 flächige betrachten lässt, eben so gut wie das Quadrat als eine Species des Genus Rhombe angesehen werden kann.

Es werde im Allgemeinen Cos. $\frac{360^{\circ}}{2p}$ bezeichnet durch q, so dass q von dem Werthe von p abhängt. Es sei zuerst $p > 2$, so wird, wenn das Verhältniss eines Querstrahls x der 1sten Art zu einem solchen y der 2ten Art $= q : 1$ ist, der $2 \times t$flächige Ebenrandner sich umwandeln in einen t flächigen Ebenrandner der ersten Stellung, so wie umgekehrt, wenn jenes Verhältniss $= 1 : q$ wird, er ein $t$flächiger Ebenrandner der 2ten Stellung werden muss. Wenn das Verhältniss $x : y$ in einem $2 \times t$flächigen Ebenrandner kleiner als $q : 1$ oder grösser als $1 : q$ wird, so werden bei ihm die Scheitelkanten der einen oder der andern Art einspringende Kanten. Denkt man sich die Flächentheile [70] *abd*, *aed* Fig. 256.
u. s. w. so weit verlängert, bis die Theile *ibd*, *ild*, *def*, *dmf* u. s. w. verschwinden, so hat man einen solchen 2×12-flächigen Ebenrandner.

Ist $p = 2$, so wird Cos. $\frac{360^{\circ}}{2.2} = \text{Cos. } 90^{\circ} = 0$. Ist nun 1) $x : y = q : 1 = 0 : 1 = 1 : \infty$, so wird aus dem 2×4-flächigen Ebenrandner der Stellvertreter des 4 flächigen Ebenrandners der 1sten Stellung, ein *quersäuliger 4flächiger Schiefwandner* (*clinepipedum tetraedrum transversoprismaticum*), *eine Quersäule* (*prisma transversum*) erster Stellung. Ist 2) $x : y = \infty : 1$, so entsteht auf gleiche Weise ein quer-

säuliger 4flächiger Schiefwandner 2ter Stellung, eine Quersäule 2ter Stellung.

Quersäule im Allgemeinen ist ein von 4 gleichwerthigen Flächen, denen eine und dieselbe Queraxe parallel liegt, begrenzter Raum, gleichsam eine auf einer ihrer Seitenkanten liegende Säule, die, wenn sie vertical stände, als 2 × 2flächige Säule (mit rautenförmigem Querschnitte) betrachtet werden würde. Jede Quersäule hat 2 Gipfelkanten und 2 Mittelkanten; die 4 Kanten liegen einander parallel und horizontal.

Wenn die Quersäule als 2fach 2gliedrige gleichstellig 2endige Gestalt auftritt, so sind ihre 4 Flächen |≅| 2fach 1gliedrig, ihre 2 Gipfelkanten sowohl, als auch ihre 2 Mittelkanten sind 2fach 2gliedrige Kanten und je 2 gleichnamige Kanten sind einander |≅|. Jede Gipfelkante vertritt die Stelle 2er |≅| sich verhaltender gleichseitig ungleichendiger 2fach 1gliedriger Scheitelkanten, die unter einem Winkel von 180° im Scheitel zusammenstossen. Stellt man sich vor, die vier Kanten dieser Quersäule, vorwärts sowohl als rückwärts verlängert, schnitten sich in unendlicher Entfernung vom Mittelpunkte, so erhält die Gestalt 2 unendlich spitzige 2 × 2kantige 2fach 2gliedrige Randecken und kann dann füglich mit den übrigen *t*flächigen Ebenrandnern zusammengestellt werden*), obgleich jene Randecken keine wahren Ecken sind.

---

*) Denkt man sich bei einem 2 × *t*flächigen Ebenrandner überhaupt die Hauptstrahlen und die Querstrahlen der ersten oder 2ten Art constant, während die Querstrahlen der 2ten oder 1sten Art wachsen, bis sie unendlich sind, so wird dadurch, wenn diese Grenze erreicht ist, eine Gestalt entstehen, in welcher die *p* Scheitelkanten der einen Art in einem jeden Scheitel horizontal liegen, die *p* Scheitelkanten [71] der andern Art aber werden nach aussen hin einspringend (d. h. rinnenartig vertieft) sein. Auch hier wird die Gestalt keinen geschlossenen Rand haben und sie wird nicht mehr ein Ebenrandner genannt werden können, sondern allgemein als ein *p*fach quersäuliger Schiefwandner bezeichnet werden müssen, bei dem, wenn *p* eine gerade Zahl ist, gleichfalls jede der 2 × *t* Flächen mit einer andern in die Verlängerung einer und derselben Ebene fallen wird; beide Stücke dieser einen Ebene erscheinen hier aber getrennt von einander durch ein Paar dazwischen hervortretende, eine horizontale Scheitelkante bildende Flächen, weshalb sie als 2 abgesonderte Flächen betrachtet werden, obgleich jene Scheitelkanten der anderen Art im Innern des Körpers verbunden gedacht werden können durch eine Fläche eines *t*flächigen Ebenrandners, der von dem *p*fach quersäuligen Schiefwandner umschlossen sein würde. Fig. 257. So ist z. B. die von den Flächen *M* gebil-

[71] Wenn die Flächen P angesehen werden als einem 4flächigen quersäuligen Schiefwandner erster Stellung angehörig, so bilden auch die Flächen M einen solchen 2ter Stellung, wenn die ganze Gestalt ein Ebenrandner mit 2×2-seitig 2fach 2gliedrigem rechtwinkligen Rande ist, der als eine zusammengesetzte Gestalt (als ein sogenanntes Rectanguläroktaeder, octaèdre à base rectangle) zu betrachten ist. Fig. 258.

Gleichwie der $t$flächige Ebenrandner durch Verlängerung der Hauptaxe bis ins Unendliche zu einer $p$flächigen Säule wurde, so wird der quersäulige 4flächige Schiefwandner zu einem 2flächigen Seitenwandner oder 2flächigen Gegenseitenwandner (*Orthepipedum diedrum*) der ersten oder der 2ten Stellung. Ein 2flächiger Gegenseitenwandner hat 2 einander parallele Seitenflächen, welche, wenn die Gestalt eine gleichstellig 2endige 2fach $p$gliedrige ist, die Bedeutung 2fach 2gliedriger [72] Figuren haben und diese in zusammengesetzten, endlich begrenzten Gestalten erkennen lassen. Er hat keine Seitenkanten, wodurch er von den $p$flächigen Säulen verschieden ist, die ihm sonst entsprechen*).

---

dete Gestalt, wenn man von dem Dasein der übrigen Flächen absieht und die Linie di als gleichstellig 2endige 2fach 4gliedrige Hauptaxe sich vorstellt, ein 4fach quersäuliger Schiefwandner, der als 2×8flächige Gestalt betrachtet werden muss, obgleich je 2 seiner Flächen in eine und dieselbe Ebene fallen. Denkt man sich einen 2fach 3gliedrig gleichstellig 2endigen 3fach quersäuligen Schiefwandner, so werden bei ihm von der Mitte aus anfangend 3 Quersäulen unter Winkeln von 120° divergiren. Man sieht daher, dass der quersäulige 4flächige Schiefwandner zugleich auch in die Reihe der $p$fach quersäuligen Schiefwandner gehört und, wenn er eine 2fach 2gliedrige Gestalt ist, den Namen 2fach quersäuliger Schiefwandner erhalten würde; von den beiden Quersäulen in ihm ist die eine als Verlängerung der andern über den Mittelpunkt des Körpers hinaus zu betrachten.

*) Werden bei einem $2 \times t$flächigen Schiefwandner, bei dem die Querstrahlen der ersten (oder 2ten) Art $= \infty$ sind, auch die Hauptstrahlen $= \infty$, während die Querstrahlen der 2ten (oder ersten) Art unverändert bleiben, so entsteht ein $2 \times p$flächiger Gegenseitenwandner. So ist z. B. die in der Figur von den Fig. 257.
Flächen o gebildete Gestalt, wenn man von dem Dasein der Flächen P und M abstrahirt und die Linie di als Hauptaxe ansieht, ein 2×4flächiger Gegenseitenwandner, welcher von den 2×4flächigen Säulen, mit denen er zunächst verwandt ist, dadurch abweicht, dass sein Querschnitt keine geschlossene Figur ist, ihm daher Fig. 259.
4 Seitenkanten der einen Art fehlen, so dass nur die 4 der andern

Ist $x : y > 1 : q$ oder $< q : 1$, so wird der Querschnitt der $2 \times p$flächigen Säule, gleich dem des analogen $2 \times t$-flächigen Ebenrandners, sternförmig, d. h. von den p Winkeln der einen Art wird jeder grösser als 180°.

Wenn die Hauptaxe gleichstellig 2endig 2fach 1gliedrig ist, so hat man statt des $t$flächigen Ebenrandners einen *2flächigen quermittelkantigen Schiefwandner*, d. h. einen von 2 Ebenen, die in einer horizontalen Mittelkante zusammentreffen, begrenzten Raum. Sofern er 2fach 1gliedrig gleichstellig 2-endig ist, haben seine Flächen die Bedeutung 2fach 1gliedriger Figuren und seine Mittelkante ist dann eine 2fach 2gliedrige Kante; auch hat man 2flächige solche Schiefwandner der 1sten und 2ten Stellung zu unterscheiden. Die Mittelkanten der einen sind senkrecht auf dem 2fach 2gliedrigen Querstrahle der 1sten Art, die der andern auf dem der andern Art; die Mittelkanten beider Arten daher einander parallel. Dem $2 \times t$flächigen Ebenrandner entspricht dann ebenso ein *mitteleckiger* $2 \times$ *2flächiger Schiefwandner.* Seine vier gleichwerthigen Flächen haben die Bedeutung [73] 1fach 1gliedriger Flächen, jede derselben verhält sich zu jeder der beiden ihr zunächstliegenden gegenbildlich, diese beiden sind also einander ebenbildlich. Sie bilden eine 2×2kantige 2fach 2gliedrige Mittelecke, in welcher 2 $|\cong|$ sich verhaltende, 2fach 1gliedrige, horizontale Mittelkanten und 2 nach den Enden der Hauptaxe hinlaufende, $|\cong|$ sich verhaltende, 2fach 1gliedrige, schiefliegende Gipfelkanten sich vereinigen.
Fig. 260. Die Flächen P bilden einen quermittelkantig 2flächigen, die Flächen M einen mitteleckigen 2×2flächigen Schiefwandner, wenn die ganze Gestalt ein zusammengesetzter Ebenrandner mit 2- und 1seitigem Querschnitte (gerade Doppelpyramide mit gleichschenklig dreiseitiger Basis) ist. Die Flächen P haben in dieser zusammengesetzten Gestalt die Form gleichschenkliger, die Flächen M aber die ungleichschenkliger Dreiecke. Da hier nur ein Querstrahl der ersten und ein solcher

---

Art (als Einkerbungen oder einspringende Kanten) an ihm vorhanden sind.

Ist p gerade, so fallen je 2 Flächen eines solchen Seitenwandners in die Verlängerung einer und derselben Verticalebene (d. h. sie sind seitliche Verlängerung der Seitenflächen einer p-flächigen Säule). Es ist ersichtlich, dass der 2flächige Gegenseitenwandner als 2fach $p$gliedrige Gestalt in die Reihe der $2 \times p$flächigen Gegenseitenwandner gehört.

der 2ten Art vorhanden sind, welche zusammen die einzige 2fach 2gliedrige (ungleichendige) Queraxe ausmachen, so kann hier eine und dieselbe Fläche des regelmässig 2 $\times$ 2flächigen Schiefwandners nicht Querstrahlen beider 2fach 2gliedrigen Arten schneiden.

Gleichwie aus dem 2 $\times$ *t*flächigen Ebenrandner ein scheinbar *v*flächiger wurde, wenn die Randkanten von jenem parallel mit einem 2fach 2gliedrigen Querstrahle wurden (was dort stattfand, wenn $x : y = 1 : 1$ war), so wird auch hier, wenn die beiden Mittelkanten des 2 $\times$ 2flächigen Schiefwandners parallel der 2fach 2gliedrigen Queraxe, folglich einander selbst parallel werden, aus diesem Körper ein scheinbar 4flächiger quersäuliger Schiefwandner, welcher aber ebenso die Bedeutung einer 2 $\times$ 2flächigen Gestalt behält, wie jener Ebenrandner die Bedeutung eines 2 $\times$ *t*flächigen behielt. Der 2 $\times$ *p*flächigen Säule entsprechend hat man hier den 2 $\times$ 1-flächigen Seitenwandner oder 2 $\times$ 1flächigen Nebenseitenwandner (*orthepipedum dimonoedrum*), den man sich entstanden denken kann aus einem 2 $\times$ 2flächigen Schiefwandner, dessen Mittelquerschnitt constant geblieben ist, dessen Hauptstrahlen aber $= \infty$ geworden sind, so dass, wenn jener eine Mittelecke hatte, dieser zwei sich in einer Seitenkante schneidende Flächen hat; hatte jener keine Mittelecke, so hat auch dieser keine Seitenkante und der Seitenwandner erhält die Form eines 2flächigen Gegenseitenwandners. Der *p*flächigen Säule analog ist hier der 1*flächige Seitenwandner* (*orthepipedum monoedrum*), eine einzige Seitenfläche, welche [74] auf einem 2fach 2gliedrigen Querstrahle senkrecht steht, wenn der 1flächige Seitenwandner ein 2fach 1gliedriger ist.

Die gleichstellig 2endige 2fach 1gliedrige Gestalt, welche als Beispiel durch die Abbildung versinnlicht ist, lässt sich betrachten als zusammengesetzt aus den 2 Flächen *M* eines 2 $\times$ 1flächigen Nebenseitenwandners, den 2 Flächen *T* eines 2flächigen Gegenseitenwandners und aus der Fläche *q* eines 1flächigen Seitenwandners. Die Flächen *o* bilden einen 2-flächigen quermittelkantigen Schiefwandner erster und jene mit *o'* bezeichneten einen solchen zweiter Stellung. Die Flächen *P* bilden einen mitteleckigen 2 $\times$ 2flächigen Schiefwandner. Fig. 236. *A.*, *B.*

Auf ähnliche Weise lässt sich die abgebildete 2gliedrige Gestalt zerlegen in zwei verschiedene 2 $\times$ 4flächige Ebenrandner *P* und *n* und in 2 verschiedene quersäulige 4flächige Fig. 237.

Schiefwandner erster Stellung *o* und *r*, in eine 2 × 2flächige Säule *d*, in einen 2flächigen Gegenseitenwandner 1ster Stellung *b* und in einen solchen 2ter Stellung *s*. Die Zerlegung
Fig. 238. der andern 2gliedrigen Gestalt ist aus dem eben Entwickelten
239. ohne weitere Schwierigkeiten möglich. Die 4gliedrige Gestalt besteht aus den Flächen *P* eines 8flächigen Ebenrandners erster Stellung, wenn *s* die Flächen eines solchen 2ter Stellung sind. Die Flächen *z* bilden für sich allein einen 2 × 8-flächigen Ebenrandner, die Flächen *g* gehören einer 4flächigen Säule 2ter Stellung an und die Flächen *r* bilden eine
Fig. 240. 2 × 4flächige Säule. Die Zerlegung der abgebildeten 6gliedrigen Gestalt in 2 verschiedene 12flächige Ebenrandner *t* und *u* erster Stellung, einen solchen 2ter Stellung *s*, einen 2 × 12flächigen Ebenrandner *a*, in die 2flächige Tafel *P* und in die 6flächige Säule 1ster Stellung *M* ist ohne weitere Anweisung ausführbar.

II. Einfache Gestalten mit gleichstellig 2endiger 1fach *p*gliedriger Hauptaxe

(gleichstellig 2endige 1fach *p*gliedrige Gestalten).

Jeder einfache derartige Schiefwandner ist, sofern er eine ringsum endlich begrenzte Gestalt ist, ein *t*flächiger Ebenrandner, dem, abstrahirt von seiner Verbindung mit dem gegebenen Strahlensysteme, ein 2fach *p*gliedriges Strahlensystem entsprechen würde. In dieser Verbindung aber hat er bloss die Bedeutung einer *p*gliedrigen regelmässig gleichendigen Gestalt, eines 1fach *p*gliedrigen *t*flächigen Ebenrandners, den man der Kürze [75] wegen, da es keinen 2 × *t*flächigen 1fach *p*gliedrigen giebt, bloss schlechthin *1fach p gliedrigen Ebenrandner* nennen kann.

Berücksichtigt man die Theile eines solchen Körpers hinsichtlich auf ihr Verhalten zu dem gegebenen Strahlensysteme, so folgt, dass ihre Bedeutung eine andere sein müsse, als die, welche ihnen zustehen würde, wenn man den Körper in Beziehung auf das ihm entsprechende Strahlensystem betrachtet. So verhalten sich also seine Flächen als 1fach *p*gliedrige, seine Scheitel als *p*gliedrige 1fach *p*kantige Ecken, seine Randecken als 2fach 1gliedrige 2- und 2 × 1kantige Ecken, seine Randkanten als gleichseitige ungleichendige Kanten, seine Scheitelkanten als (ungleichendige ungleichseitige d. h.

als) 1fach 1gliedrige Kanten. Auch sind die Flächen der oberen Körperhälfte denen der unteren nicht $|\cong|$, sondern bloss $|=|$, und nur die einer und derselben Hälfte sind $\cong$. Diese Art des Verhaltens der Theile ist aber nur bemerklich, wenn die Gestalt mit andern 1fach $p$gliedrigen gleichstellig 2endigen Gestalten eine zusammengesetzte Gestalt ausmacht, die so beschaffen ist, dass das *ihr* entsprechende Strahlensystem sich unmittelbar als ein 1fach $p$gliedriges gleichstellig 2endiges erkennen lässt. Würden bei unveränderten Querstrahlen die Hauptstrahlen in einem 1fach $p$gliedrigen Ebenrandner $= \infty$, so wird er zu einer $p$flächigen Säule, die gleichfalls nur die Bedeutung einer gleichstellig 2endigen 1fach $p$gliedrigen Gestalt hat.

Für $p = 1$ ist jeder Schiefwandner ein mittelquerkantiger 2flächiger und jeder Seitenwandner ein 1flächiger. Ein Ebenrandner mit 3×1seitigem Querschnitte bcd und 3×1- Fig. 261 *a*.
kantigen 1gliedrigen Scheiteln aa z. B. ist anzusehen als eine zusammengesetzte Gestalt aus drei 2flächigen Schiefwandnern. Eine gerade Säule mit 3×1seitigem Querschnitte ist zu betrachten als zusammengesetzt aus drei 1flächigen Seitenwandnern und der 2flächigen Tafel.

Für $p = 2$ ist jeder Schiefwandner ein 4flächiger quersäuliger Schiefwandner, dessen Flächen, in zusammengesetzten Gestalten, die sich als solche mit gleichstellig 2endiger 1fach 2gliedriger Hauptaxe zu erkennen geben, die Bedeutung von 1fach 1gliedrigen Flächen nicht verleugnen. Ebenso ist ersichtlich, dass seine Mittelkanten gleichseitige (ungleichendige) 2fach 1gliedrige und seine Gipfelkanten 1fach 2gliedrige sind.

Der Ebenrandner mit langrautenförmigem Rande (rhom- Fig. 261 *b*.
boidisches Oktaeder) hat 4 Flächen P, welche einen 4flächigen derartigen [**76**] Schiefwandner bilden, und 4 Flächen M, die einen 2ten begrenzen, so dass die ganze Gestalt angesehen werden kann als aus 2 verschiedenen 4flächigen quersäuligen Schiefwandnern zusammengesetzt*). Jeder Seitenwandner ist ein 2flächiger Gegenseitenwandner, bei welchem jede Fläche die Bedeutung einer 2fach 1gliedrigen Figur hat.

---

*) Die Ebenrandner mit 1fach 3gliedrig 2×3seitigem Rande Fig. 261 *c*., *d*.
oder mit 1fach 4gliedrig 2×4seitigem Rande sind die ähnlichen Gestalten in dem betreffenden 3gliedrigen und 4gliedrigen Gestaltensysteme.

Fig. 241. Das Bild der 1fach 2gliedrigen Gestalt lässt erkennen, dass sie zusammengesetzt sei aus zwei 4flächigen quersäuligen Schiefwandnern *f* und *l* und aus den 2 Tafelflächen *P*. Die
Fig. 242. 1fach 4gliedrige Gestalt, welche als Beispiel dient, ist aus vier verschiedenen 8flächigen 1fach 4gliedrigen Ebenrandnern *g*, *a*, *P*, *b* zusammengesetzt. Das als Beispiel gewählte Bild
Fig. 243. einer 1fach 6gliedrigen Gestalt ist das einer solchen, welche zusammengesetzt ist aus den fünf verschiedenen 1fach 6gliedrigen 12flächigen Ebenrandnern *x*, *z*, *a*, *s*, *u*, aus den Tafelflächen *P* und aus den Seitenflächen dreier 6flächiger 1fach 6gliedriger Säulen *M*, *c*, *e*.

III. Einfache Gestalten mit gerenstellig 2endiger 2fach *p*gliedriger Hauptaxe

(gerenstellig 2endige 2fach *p*gliedrige Gestalten).

Es liegen hier nicht in jeder Hauptflügelfläche die Strebestrahlen gepaart. Man denke sich zwei gleichwerthige benachbarte doppelte Flügelflächen des einen (z. B. oberen) Hauptstrahles, und zwar zuerst so, dass sie beide gegen einander eine Neigung kleiner als 180° bilden; dazu nehme man die zwischen diesen beiden liegende doppelte Flügelfläche des andern (unteren) Hauptstrahles, welche bekanntlich jene Neigung halbirt. In jeder dieser 3 Flügelflächen nehme man einen Strebestrahl so, dass die drei Strebestrahlen zu einerlei Art gehören. Man denke sich die Begrenzungsflächen, für welche diese Strebestrahlen als Normalen zu betrachten sind, gleich weit vom Mittelpunkte des Strahlensystems entfernt. Es ist einleuchtend, dass die dem unteren solchen Strebestrahle entsprechende Begrenzungsfläche sich gegen die beiden andern hinsichtlich ihrer Lage auf gleiche Weise verhalten müsse. Daraus ergiebt sich, dass die entstehenden Mittelkanten der Gestalt einen regelmässig *kronenartig* [77] *zick-*
Fig. *zackförmigen* Kantenring, d. h. einen kronenartig zackigen
262*a*. Rand bilden müssen. Man erhält so zunächst eine Gestalt,
264. die man *tflächigen Kronrandner* (*stephanoides t-edrica*) nennen kann; also z. B. 6flächiger Kronrandner (*stephanoides hexae-*
Fig. *drica*, Rautenflächner, Rautenflach, Rhomboeder, rhomboèdre,
265 rhomboide, geschobener Würfel, körperlicher Rhombus
A., *B.*, *C.* u. s. w.); 8flächiger Kronrandner (*stephanoides octaedrica*); 10flächiger, 12flächiger u. s. w. Kronrandner (*stephanoides*

decaedrica, dodecaedrica etc.). Jeder *t*flächige Kronrandner hat als Gestalt an sich betrachtet, so wie auch als gerenstellig 2endig 2fach *p*gliedrige Gestalt,

1) *p* obere und *p* untere Flächen *P*, welche $|\cong|$ sind und die Bedeutung 2fach 1gliedriger 2 $\times$ 2seite oder Lanzenvierecke haben;

2) 2 *Scheitel a*, welche *p*kantige 2fach *p*gliedrige Ecken und unter sich $|\cong|$ sind;

3) *p* obere und *p* untere *Randecken e*, deren jede eine 2- und 1kantige 2fach 1gliedrige Ecke ist; sie alle sind $|\cong|$;

4) *p* dem oberen und *p* dem unteren Scheitel angehörige *Scheitelkanten s*, welche $|\cong|$ sind; jede ist gleichseitig ungleichendig, folglich 2fach 1gliedrig;

5) 2 $\times$ *p Randkanten r*, welche 2gliedrige Kanten sind; die *p* einen sind unter sich $\cong$, verhalten sich aber $|=|$ zu den *p* andern, die unter sich $\cong$ sind.

Man kann einen *t*flächigen Kronrandner auch im Allgemeinen, wenn man nicht die Zahl seiner Flächen angeben will, einen *gleichschenkligen Kronrandner* (*stephanoides doroidea*) nennen.

Die doppelten Hauptflügelflächen liegen so, dass jede durch beide Scheitel und eine Randecke geht; sie ist also begrenzt von der Hauptaxe, von einer Scheitelkante und von einer nach dem Scheitel hinlaufenden Diagonale (*Scheiteldiagonale*) einer der lanzenförmigen Flächen. Sie ist daher ein 3 $\times$ 1 seit. Der mittlere Querschnitt geht durch die Halbirungspunkte aller Randkanten und ist ein regelmässiges *t*seit. Der Querschnitt durch die *p* oberen oder durch die *p* unteren Randecken ist ein regelmässiges *p*seit, dessen Seiten Querdiagonalen der Flächen sind. Die beiden solchen Schnitte sind $|\cong|$. Eine und dieselbe doppelte Hauptflügelfläche schneidet diese beiden Querschnitte so, dass sie im oberen (oder unteren) durch eine Linie geht, die [78] von dem Mittelpunkte dieses *p*seits nach einem Winkel desselben hinausstrahlt, während sie in dem unteren (oder oberen) durch eine Linie geht, die von dem Mittelpunkte *dieses p*seits aus senkrecht auf eine Seite desselben gezogen werden kann. Diese beiden Linien aber verhalten sich zu einander (da die beiden regelmässigen *p*seite gleich sind) = Sin. Tot. : Cos. $\frac{360^\circ}{2p}$. Stellt daher die Figur eine doppelte Hauptflügelfläche dar, in welcher *ef* und Fig. 266.

dc jenen beiden Querschnitten durch die Randecken, om aber dem mittleren Querschnitte angehören, so ist, wenn $\text{Cos.}\,\frac{360^\circ}{2p} = q$ genannt wird,

$$ef : dc = q : 1$$
$$om = \frac{ef + dc}{2}$$
$$ef + dc : ef = 1 + q : q$$
$$2 \cdot om : ef = 1 + q : q$$
$$ef = \frac{q}{1 + q} \cdot 2 \cdot om,$$

ferner ist
$$ob : eb = om : ef$$
$$ob - eb : ob = om - ef : om,$$
$$oe : ob = om - \frac{q}{1+q} \cdot 2 \cdot om : om$$
$$= 1 - \frac{2q}{1+q} : 1$$
$$= \frac{1-q}{1+q} : 1,$$

das heisst
$$oe = \frac{1-q}{1+q} \cdot ob.$$

Für $p = 3$ wird $q = \text{Cos.}\,\frac{360^\circ}{2\,.\,3} = \text{Cos.}\,60^\circ = \frac{1}{2}$, also $oe = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}\,.\,ob = \frac{1}{3}\,ob$, folglich $be = ed = da$, d. h. im 6 flächigen Kronrandner wird die Hauptaxe von den beiden Querschnitten durch die Randecken so geschnitten, dass sie in drei gleiche Theile getheilt ist. Wenn $be = ed$, so ist auch $bf = fc$, d. h. die Scheiteldiagonale bc einer der Flächen des 6 flächigen Kronrandners wird durch die Querdiagonale (welcher als Seite des Querschnitts durch die Randecken der Punkt f angehört) [79] halbirt. Da nun in jedem t flächigen Kronrandner die Querdiagonale der Fläche durch die Scheiteldiagonale in zwei gleiche Theile getheilt wird, so muss die 2 fach 1 gliedrige 2 mal 2 seitige Fläche des 6 flächigen Kronrandners so beschaffen sein, dass in ihr die beiden auf einander senkrechten Diagonalen sich gegenseitig halbiren, d. h. sie

muss als Fläche an sich betrachtet ein gleichseitiges Lanzenviereck, eine Raute oder eine Rhombe sein*).

Ist $p = 2$, so ist Cos. $\left(\frac{360^{\circ}}{2 \cdot 2}\right) = $ Cos. $90^{\circ} = 0$, also $\frac{1 - q}{1 + q} = 1$, d. h. die Entfernung einer durch die oberen oder unteren Randecken des Körpers gelegten Ebene vom Mittelpunkte ist = der halben Hauptaxe, d. h. der obere Endpunkt der Axe fällt mit den beiden oberen Randecken und der untere mit den beiden unteren in einerlei gerade Horizontallinie. Daher hat der *4flächige Kronrandner* statt des Scheitels und der zwei Scheitelkanten, die er haben müsste, an jedem Ende der Hauptaxe bloss eine 2fach 2gliedrige horizontale Gipfelkante g, und bei jeder seiner Flächen P ist die lanzenförmige Figur dadurch, dass ihr Winkel, welcher am Ende der Hauptaxe anliegt, $= 180^{\circ}$ ist, zu einem gleichschenkligen Dreiecke geworden. Fig. 263.

Gleichwie der 2fach $p$gliedrige $t$flächige Kronrandner, wenn p eine ungerade Zahl 3, 5, 7 u. s. w. ist, sich so beschaffen zeigt, dass je eine der p oberen Flächen einer der p unteren parallel liegt, mithin beide auf einer und derselben, durch die Hauptaxe gelegten, Ebene senkrecht stehen, welche doppelte Hauptflügelflächen bildet, so muss auch, wenn $p = 1$ ist, die Gestalt aus einer oberen und einer unteren Fläche bestehen, welche einander parallel liegen, und beide müssen auf der einzigen möglichen, durch die Hauptaxe gelegten, Ebene senkrecht sein, in welcher die doppelten Hauptflügelflächen liegen. Der Stellvertreter des 2fach $p$gliedrigen $t$flächigen Kronrandners ist daher für die 2fach 1gliedrige gerenstellig 2endige Hauptaxe ein *kantenloser 2flächiger Schiefwandner*, dessen Flächen die Bedeutung 2fach 1gliedriger Figuren haben.

Ein $2 \times t$flächiger Kronrandner (*stephanoides di-t-edrica*) wie z. B. der 2×4flächige Kronrandner (*stephanoides* [**80**] *ditetraedrica*, tetragonales Skalenoeder); der 2×6flächige Kronrandner (hexagonales Skalenoeder, 3- und 3kantner, auch 3- und 3kantiges Dodekaeder, ungleichschenklige 6seitige Pyramide, Bipyramoide, Kalkpyramide); der 2×8flächige Kronrandner (*stephanoides dioctaedrica*) hat $2 \times t$Flächen Fig. 267. Fig. 268. Fig. 269.

*) (Daher die bereits angegebenen Benennungen Rautensechsflächner, Rautenflach, Rhomboeder, Rhomboèdre, Rhomboide, körperlicher Rhombus u. s. w.)

P, welche auf 1 fach 1 gliedrigen Strebestrahlen senkrecht stehen und in der Regel 1 fach 1 gliedrige, d. h. ungleichschenklige Dreiecke sind. Auch bei ihm bilden die Randkanten einen kronartigen zickzackförmigen Kantenring. Die p einen der Randkanten r sind einander ebenbildlich und verhalten sich zu den p andern gegenbildlich, sie sind 1 fach 2 gliedrige. Die Scheitelkanten sind von zweierlei Art, jede liegt in einer doppelten Hauptflügelfläche und ist eine ungleichendige gleichseitige, d. h. 2 fach 1 gliedrige Kante. Die einen s können von den andern σ im Allgemeinen sowohl durch Länge als Grösse unterschieden werden. Von jeder Art sind p obere und p untere vorhanden. Eine obere der ersten Art und eine untere der 2 ten Art, oder umgekehrt, liegen in einer doppelten Hauptflügelfläche, so dass diese, von ihnen beiden und der Hauptaxe begrenzt, ein Dreieck bildet. In jeder der p oberen und p unteren Randecken e, die einander $|\cong|$, 2- und 2×1 kantige, 2 fach 1 gliedrige Ecken sind, laufen 2 gegenbildliche Randkanten und 2 ungleichwerthige Scheitelkanten zusammen. Die beiden Scheitel sind $|\cong|$, $2 \times p$ kantige, 2 fach p gliedrige Ecken.

Als eigenthümliche Arten der $2 \times t$ flächigen Kronrandner sind anzusehen jene Gestalten, bei denen die Flächen senkrecht auf solchen 1 fach 1 gliedrigen Strebestrahlen stehen, die in Hauptflügelflächen liegen, welche durch die 2 gliedrigen Querstrahlen gehen. Weil nämlich in einer solchen Hauptflügelfläche 2 gleichwerthige derartige Strebestrahlen sich befinden, so folgt, dass sich die beiden gleichwerthigen, zu ihnen senkrechten Flächen in einer horizontalen Randkante schneiden müssen, so dass also die bei andern $2 \times t$ flächigen Kronrandnern vorhandene Neigung jeder Randkante gegen den mittleren Querschnitt hier $= 0$ wird. Die Gestalt an sich betrachtet hat dann das Ansehen eines v flächigen Ebenrandners, wenn $v = 2\ t$ ist, dessen Flächen aber gleich denen der $2 \times t$ flächigen Kronrandner in zusammengesetzten Gestalten sich als 1 fach 1 gliedrige Flächen verhalten; seine Randkanten sind ebenso 1 fach 2 gliedrig, seine Scheitelkanten, obwohl alle gleich an Länge, Grösse u. s. w., [**81**] sind dennoch von zweierlei Art in Beziehung auf ihr Verhalten zu dem gegebenen Axensysteme, ähnlich den Scheitelkanten des $2 \times t$ flächigen Kronrandners. Auch die Bedeutung der Ecken dieses Körpers ist von der der analogen Ecken im $2 \times t$ flächigen Kronrandner nicht verschieden.

Wenn p eine ungerade Zahl ist, so sind die $2 \times t$flächigen Kronrandner im Allgemeinen parallelflächige. Ist p aber eine gerade Zahl, so ist Parallelismus der Flächen nicht vorhanden. Bei 2fach 1gliedriger gerenstellig gleichendiger Hauptaxe werden daher die 2×2 Flächen der Gestalt, welche mit den $2 \times t$flächigen Kronrandnern in eine Reihe gehört, paarweise parallel sein müssen, so dass also 4 einander parallele Kanten entstehen. Es ist diese Gestalt ein 2×2- oder 4flächiger strebesäuliger Schiefwandner, der, wenn seine Kanten senkrecht ständen, d. h. der Hauptaxe parallel wären, eine Säule mit rautenförmigem Querschnitte sein würde. Zwei der Kanten dieser Strebesäule sind schiefliegende 2fach 1gliedrige Gipfelkanten, die beiden andern sind 1fach 2gliedrige Mittelkanten; je 2 einer und derselben Mittelkante anliegende Flächen verhalten sich $\cong$; je 2 einer und derselben Gipfelkante anliegende aber, so wie je 2 einander parallele, verhalten sich $|=|$. Sämmtliche 4 Flächen sind 1fach 1gliedrige. Alle aufgeführten Theile lassen die ihnen zugeschriebenen Eigenschaften an zusammengesetzten Gestalten erkennen.

Denkt man sich an einem $t$flächigen Kronrandner die Hauptaxe wachsend, während die 1fach 2gliedrigen Querstrahlen unverändert bleiben, so erhält man, wenn die Hauptaxe $= \infty$ ist, eine *tflächige Säule*, deren Seitenwände auf den (strebestrahlenartig) 2fach 1gliedrigen Querstrahlen senkrecht stehen. Die p einen der Flächen derselben gehören auf dieselbe Weise dem oberen Hauptstrahle an, wie die p andern dem unteren. Die Seitenkanten sind 1fach 2gliedrig.

Lässt man an einem $2 \times t$flächigen Kronrandner die Hauptstrahlen wachsen, bis sie unendlich sind, während sowohl die 1fach 2gliedrigen als auch die 2fach 1gliedrigen Querstrahlen an Länge unverändert bleiben, so erhält man eine $2 \times t$flächige Säule, deren Flächen auf 1fach 1gliedrigen Querstrahlen senkrecht stehen. Die t Seitenkanten der einen Art sind 1fach 2gliedrig und die beiden einer solchen Kante anliegenden Flächen sind einander ebenbildlich; die t andern Seitenkanten sind 2fach [82] 1gliedrig gleichseitig ungleichendig, und die 2 einer solchen Kante anliegenden Flächen sind einander gegenbildlich.

Auf ähnliche Weise entsteht aus dem erwähnten $v$flächigen Ebenrandner eine $t$flächige Säule 2ter Art, deren Flächen auf 1fach 2gliedrigen Querstrahlen senkrecht stehen. Ihre Seitenkanten sind 2fach 1gliedrige gleichseitig ungleich-

endige Kanten, je 2 einer Seite anliegende Flächen verhalten sich |=|.

Für $p = 1$ erhält man als Stellvertreter der *t*flächigen Säule mit 2fach 1gliedrigen Flächen den 2flächigen Gegenseitenwandner mit 2fach 1gliedrigen Flächen, statt der *t*flächigen Säule mit 1fach 2gliedrigen Flächen einen 2flächigen Gegenseitenwandner mit 1fach 2gliedrigen Flächen. Jeder besteht aus 2 parallelen Flächen; die des einen stehen auf denen des andern senkrecht, weil auch hier die 2fach 1gliedrigen Querstrahlen auf den 1fach 2gliedrigen senkrecht sind. Die 2 × 2flächige Säule tritt als solche auch hier auf und hat den Charakter der oben erwähnten 2 × *t*flächigen Säule.

Fig. 244 A., B. 245. 246 A., B., C., D., E., F. Als Beispiele von zusammengesetzten gerenstellig 2endigen 2fach *p*gliedrigen Gestalten mögen dienen: 1) eine 2fach 1gliedrige *A* mit ihrer Horizontalprojection *B**); 2) eine 2fach 2gliedrige und 3) einige 2fach 3gliedrige, welche mehr oder weniger zusammengesetzt sind und leicht in die einfachen Gestalten zerlegt werden können, aus denen sie zusammengesetzt sind. Nur eine derselben möge hier beispielsweise Fig. 246 C. zerlegt werden. Die Flächen *P* eines 6flächigen Kronrandners sind verbunden mit denen *m* eines eben solchen Körpers derselben Stellung, dessen Scheitel spitziger ist, als der des Kronrandners *P*. Die Flächen *r* und *y* gehören verschiedenen 2 × 6flächigen Kronrandnern und die Flächen *c* der 6flächigen Säule an, welche 2fach 1gliedrige Flächen hat.

[83] IV. Einfache Gestalten mit gerenstellig 2endiger 1fach *p*gliedriger Hauptaxe

(gerenstellig 2endige 1fach *p*gliedrige Gestalten).

Wenn *p* grösser als 1 ist, so sind die 1fach *p*gliedrigen, hierher gehörigen, Schiefwandner im Allgemeinen *t*flächige

*) Man pflegt einzelne minder zusammengesetzte 1gliedrige Gestalten mit besonderen Namen zu belegen. So heisst z. B. die Fig. 244. Gestalt, welche aus der Verbindung der Flächenpaare *P*, *r* und *l* entsteht, eine schiefe rectanguläre Säule (prisme oblique à base rectangle), jene, welche von den Flächen *M* und *P* gebildet ist, heisst schiefe rhombische Säule (*Hendyoeder*, prisme oblique à base rhombe), eine Verbindung von Flächen, wie *M* und *o*, nennt man ein rhomboidisches Ditetraeder, rhomboidisches Oktaeder u. s. w. Wie auf ähnliche Weise die Verbindungen *t*, *l*, *r* oder *t*, *l*, *P* u. s. w. und wieder *o*, *r* oder *o*, *t* u. s. w. und *M*, *S* oder *o*, *s* oder *o*, *z* u. s. w. zu benennen seien, ist eine leicht zu lösende Aufgabe.

Kronrandner, die aber in zusammengesetzten Gestalten, an welchen das Axensystem sich als ein gerenstellig 2endiges 1fach $p$gliedriges zu erkennen giebt, oder, was dasselbe sagt, die in Beziehung zu einem gegebenen solchen Axensysteme den Charakter annehmen, der ihnen verliehen wird dadurch, dass ihre Flächen senkrecht sind auf Strebestrahlen desselben, die hier alle 1fach 1gliedrig sind. Die p oberen Flächen verhalten sich daher zu den p unteren gegenbildlich, ohne ihnen zugleich $\cong$ zu sein. Die Scheitel sind bloss 1fach $p$gliedrig, die Scheitelkanten verhalten sich als ungleichseitige ungleichendige, d. h. 1fach 1gliedrige Kanten. Das Nämliche gilt von den Randkanten, und auch die Randecken verhalten sich bloss als 1fach 1gliedrige Ecken.

Die hier vorkommenden Säulen sind $t$flächige und zwar sind ihre Flächen 1fach 1gliedrig. Alle Seitenkanten sind von gleicher Grösse und sind 1fach 1gliedrig. Je 2 benachbarte sind $|=|$; je 2 einer und derselben Seitenkante anliegende Flächen verhalten sich ebenfalls $|=|$.

Für den Werth von $p = 1$ erhält man als Stellvertreter des 1fach $p$gliedrigen $t$flächigen Kronrandners einen 1fach 1gliedrigen 2flächigen kantenlosen Schiefwandner, bestehend aus 2 einander parallelen Flächen, die sich $|=|$ zu einander verhalten und 1fach 1gliedrige Flächen sind. Als Stellvertreter der $t$flächigen Säule hat man ebenso einen 2flächigen Gegenseitenwandner, dessen 2 Flächen sich $|=|$ zu einander verhalten und 1fach 1gliedrige Figuren sind.

Als Beispiele gerenstellig 2endiger 1fach $p$gliedriger Gestalten mögen dienen 1) eine 1fach 1gliedrige, an welcher Fig. 247.
je 3 Flächenpaare ein unregelmässiges Parallelepipedon bilden, das man häufig mit dem Namen schiefe rhomboidische Säule (prisme oblique à base de parallelogramme obliquangle) belegt. Nur je zwei einander parallele (ein Paar ausmachende) Flächen eines solchen Parallelepipeds sowohl, als auch der ganzen abgebildeten Gestalt, gehören zu einer und derselben einfachen Gestalt und bilden einen 2flächigen kantenlosen Schiefwandner oder einen 2flächigen Gegenseitenwandner; [84] 2) eine 1fach 3gliedrige mit ihrer Horizontal- Fig. 248
projection *B*. Sie besteht aus zwei verschiedenen 1fach A., B.
3gliedrigen Kronrandnern *R* und *b* und aus den Tafelflächen *a*.

V. Gestalten mit ebenbildlich 2endiger 1fach *p*gliedriger Hauptaxe
(ebenbildlich gleichendige 1fach *p*gliedrige Gestalten).

Obwohl hier alle Strebestrahlen 1fach 1gliedrig sind, so sind doch zu unterscheiden als besondere Hauptarten 1) diejenigen, welche in solchen Hauptflügelflächen liegen, in denen auch die 1fach 2gliedrigen Querstrahlen sich befinden, indem in einer solchen Flügelfläche stets 2 gleichwerthige Strahlen vorhanden sind unter gleicher Neigung gegen den 1fach 2gliedrigen Strahl, 2) jene, welche in Hauptflügelflächen liegen, die den Winkel zwischen je 2 nachbarlichen Hauptflügelflächen der eben erwähnten Art halbiren, und 3) solche, die in keiner der 2 bisher bezeichneten Arten von Hauptflügelflächen sich befinden.

Denkt man sich nun bei ebenbildlich 2endiger 1fach *p*gliedriger Hauptaxe, wenn *p* zuerst grösser als 2 ist, Flächen senkrecht auf Strebestrahlen der 3ten Hauptart gleich weit vom Mittelpunkte des Strahlensystems entfernt, so ist einleuchtend, dass, da hier jeder oberer solcher Strahl in einer Flügelfläche des oberen Hauptstrahles liegt, welche weder in die Verlängerung einer ihr gleichwerthigen Flügelfläche des unteren Hauptstrahles fällt, noch auch den Winkel halbirt, den 2 ihr gleichwerthige, einander nachbarliche, Flügelflächen des unteren Hauptstrahles mit einander bilden, die oberen und unteren Flächen der Gestalt sich in Mittelkanten von zweierlei Art schneiden müssen, welche zusammen einen un-
Fig. 262 *b*. regelmässigen zickzackförmigen, d. h. einen sägeartig zickzackförmigen Kantenring bilden. Derartige Gestalten werden daher bezeichnet durch den Ausdruck *tflächige Sägerandner*
270. (*prionoides t-edrica*); z. B. 6flächiger Sägerandner (*prionoides*
271. *hexaedrica*, trigonales Trapezoeder); 8flächiger Sägerandner
271 *a*. (*prionoides octaedrica*, tetragonales Trapezoeder); 10flächiger Sägerandner (*prionoides decaedrica*) u. s. w.

Jeder *t*flächige Sägerandner hat *t* ebenbildliche 1fach 1gliedrige Flächen *P*, die im Allgemeinen Vierecke sind, mit 2 gleich langen Seiten, welche einen der Winkel einschliessen, und 2 von einander sowohl, als auch von den beiden übrigen an Länge [85] verschiedenen Seiten. Jede der *t* ebenbildlichen Scheitelkanten *s* ist eine ungleichseitige ungleichendige, d. h. 1fach 1gliedrige Kante. Die *p* einen gehören dem einen

und die p andern dem andern Scheitel an und jeder Scheitel a ist somit eine $p$kantige 1fach $p$gliedrige Ecke. Beide Scheitel sind einander $\cong$. Die p Randkanten der einen Art R sowohl, als auch die p solchen der andern Art r sind 1fach 2gliedrige Kanten. Die einer und derselben Art angehörigen sind einander $\cong$. Die t Randecken e sind 3×1kantige 1fach 1gliedrige Ecken. In jeder sind vereinigt eine Scheitelkante s, eine Randkante R der ersten und eine solche r der 2ten Art. Alle t Randecken sind einander $\cong$. Bei keinem $t$flächigen Sägerandner sind parallele Flächen vorhanden oder parallele Kanten.

Für $p = 2$ erhält man den 4flächigen Sägerandner, der Fig. 272. von den übrigen Sägerandnern sich dadurch unterscheidet, dass seine dem Endpunkte eines Hauptstrahles angehörigen 2 Scheitelkanten einander gerade entgegengesetzt liegen, so dass sie eine 1fach 2gliedrige horizontale Gipfelkante g bilden. Die beiden Gipfelkanten sind einander nicht parallel, die Halbirungspunkte derselben vertreten die Stelle der 2 Scheitel. Die Flächen P selbst haben die Form von Dreiecken, weil statt des Winkels am Scheitel hier ein Winkel von 180° vorhanden ist.

Für $p = 1$ hat man als Stellvertreter des Sägerandners einen *schiefmittelkantigen 2flächigen Schiefwandner*, bestehend aus 2 Flächen, die mit einander eine nicht horizontale Mittelkante bilden, welche die Bedeutung einer 1fach 2gliedrigen Kante hat, während die beiden Flächen selbst als einander $\cong$ 1fach 1gliedrige Figuren zu betrachten sind.

Flächen, welche senkrecht sind auf Strebestrahlen der oben erwähnten 2ten Hauptart, bilden $t$flächige Kronrandner, die jedoch bloss die Bedeutung von Sägerandnern haben, bei denen die beiden Arten von Randkanten gleich lang und gleich gross geworden sind. Nur die einander $\cong$ Randkanten haben die Bedeutung von Randkanten gleichen Werthes. Scheitelkanten, Randecken, Flächen erscheinen als 1fach 1gliedrig, wenn die Gestalt in Verbindung mit andern eine zusammengesetzte 1fach $p$gliedrige ebenbildlich gleichendige ausmacht. Als Stellvertreter dieser Kronrandner hat man bei 1fach 2gliedriger $\cong$ gleichendiger Hauptaxe die 4flächigen Kronrandner; bei 1fach 1gliedriger solcher Axe aber kantenlose 2flächige Schiefwandner.

[**86**] Flächen senkrecht auf Strebestrahlen der ersten jener 3 Hauptarten begrenzen $t$flächige Ebenrandner, die jedoch

angesehen werden müssen als Sägerandner, bei denen jede Randkante der einen Art = 0 geworden ist, während die andern Randkanten dadurch in den mittleren Querschnitt gelangt sind. Die Randecken eines solchen Ebenrandners haben daher hier bloss den Charakter von 1fach 2gliedrigen Ecken, die Randkanten den von 1fach 2gliedrigen Kanten, die Scheitelkanten sind 1fach 1gliedrig; auch die Flächen verhalten sich als 1fach 1gliedrige und die Scheitel sind $p$kantige 1fach $p$gliedrige Ecken, obgleich die ganze Gestalt an sich, abgesehen von dem bestimmten in ihr gegebenen Strahlensysteme, mit einem gewöhnlichen $t$flächigen Ebenrandner übereinstimmt.

Als Stellvertreter dieses Ebenrandners, wenn $p = 2$ ist, hat man auch hier quersäulige 4flächige Schiefwandner und, wenn $p = 1$ ist, quermittelkantige 2flächige Schiefwandner, und die Charaktere dieser beiden Gestalten verändern sich auf eine dem in ihnen gegebenen Strahlensysteme entsprechende Weise.

Senkrecht auf den 1fach 2gliedrigen Querstrahlen einer Art stehende Flächen geben eine $p$flächige Säule mit ebenbildlichen Flächen und ebenbildlichen Seitenkanten. Die Seitenkanten sind 1fach 2gliedrig. Dasselbe gilt von den Seitenflächen. Die $p$flächige Säule, deren Flächen senkrecht stehen auf den 1fach 2gliedrigen Querstrahlen der andern Art, hat denselben allgemeinen Charakter.

Flächen, welche auf 1fach 1gliedrigen Querstrahlen senkrecht sind, bilden $2 \times p$flächige Säulen, welche als Querschnitt, wenn man ihn als ebene Figur an sich betrachtet, ein 2fach $p$gliedriges $t$seit, einen Lanzen-p-ling, haben. Die sämmtlichen Flächen einer solchen Säule sind einander $\cong$, die Seitenkanten von zweierlei Art sind 1fach 2gliedrige Kanten. Halbiren jene Querstrahlen den Winkel, der von 2 nachbarlichen 1fach 2gliedrigen Querstrahlen gebildet wird, so werden die Seitenkanten der $2 \times p$flächigen Säule von gleicher Grösse und die Säule daher übereinstimmend in dieser Beziehung mit einer $t$flächigen, deren Querschnitt ein regelmässiges $t$seit ist, hinsichtlich auf den Charakter ihrer Theile aber stimmt sie mit den $2 \times p$flächigen, hierher gehörigen, Säulen überein.

Für den Werth $p = 2$ hat man als hierher gehörige $2 \times p$flächige Säulen die 2×2flächigen, als $t$flächige die 4flächigen [87] (mit quadratischen Querschnitte) und, als Stellvertreter der $p$flächigen Säulen, die 2flächigen Gegenseiten-

wandner, welche hier als von 2, $\cong$, 1 fach 2 gliedrigen einander parallelen Flächen begrenzt zu denken sind.

Wenn $p = 1$ ist, so sind die Stellvertreter der $t$flächigen Säulen 2 flächige Gegenseitenwandner, die hier begrenzt zu denken sind von 2 $\cong$ parallelen 1 fach 1 gliedrigen Flächen. Die Stellvertreter der $2 \times p$flächigen Säulen sind 2×1 flächige oder 2 flächige Nebenseitenwandner, an denen die beiden $\cong$ 1 fach 1 gliedrigen Seitenflächen sich in einer 1 fach 2 gliedrigen Seitenkante schneiden. Statt der $p$flächigen Säulen hat man in diesem Falle 1 flächige Seitenwandner, deren einzige Begrenzungsebene auf einem der beiden 1 fach 2 gliedrigen Querstrahlen senkrecht ist.

Bei den hierher gehörigen $t$flächigen Ebenrandnern sowohl, als auch den $t$flächigen Kronrandnern, so wie auch bei den $p$flächigen Säulen und endlich auch bei den Stellvertretern dieser 3 Formen, wenn der Werth von $p = 2$ oder 1 ist, hat man eine 1 te und 2 te Stellung zu unterscheiden. Aus einer solchen Stellung lässt sich die andere herleiten durch Umdrehung der Gestalt um die Hauptaxe, so dass jeder Querstrahl einen Winkel von $\frac{360}{2p}$ Graden beschreibt.

Denkt man sich an einem gleichstellig 2 endigen $2 \times t$flächigen Ebenrandner die Gesammtheit der t einen unter sich ebenbildlichen Flächen so weit verlängert, dass sie die Gestalt allein begrenzen, so erhält man einen $t$flächigen Sägerandner, der zu dem, welcher auf ähnliche Weise durch Verlängerung der t andern unter sich ebenbildlichen Flächen entsteht, sich gegenbildlich verhält. Auf ähnliche Weise kann man an einem $2 \times t$flächigen Kronrandner durch die Verlängerung der t einen unter sich ebenbildlichen Flächen desselben einen $t$flächigen Sägerandner erzeugen, der zu dem, welcher von den gehörig verlängerten t andern unter sich ebenbildlichen Flächen jener Gestalt umschlossen wird, sich gegenbildlich verhält. Die ebenbildlich 2 endige 1 fach 2 gliedrige Gestalt A Fig. 249
und 3 gliedrige Gestalt B lassen, wenn man sie in die ein- *A., B.*
fachen Gestalten zerlegt, aus denen man sich dieselben bestehend denken kann, die wichtigsten der an solchen Gestaltensystemen vorkommenden Verhältnisse erkennen und dienen zu deren Versinnlichung.

[88] VI. Einfache Gestalten mit ungleichendiger (oder 2 × 1endiger) 2fach *p*gliedriger Hauptaxe (ungleichendige 2fach *p*gliedrige Gestalten).

Wenn *p* zuerst grösser als 2 ist und man denkt sich Flächen senkrecht auf 2fach 1gliedrige Strebestrahlen einer Art, so erhält man einen *pflächigen Spitzling*)* (*acroides p-edrica*) erster oder zweiter Stellung, z. B. 3flächiger Spitzling (*acroides triedrica*), 4flächiger Spitzling (*acroides tetraedrica*), 6flächiger Spitzling (*acroides hexaedrica*). Die *p* Flächen einer solchen Gestalt vereinigen sich sämmtlich in einem gemeinschaftlichen Eckpunkte, dem Scheitel. Die Flächen sind 2fach 1gliedrig und die *p* Scheitelkanten sind gleichseitige 2fach 1gliedrige Kanten. Der Scheitel ist eine *p*-kantige 2fach *p*gliedrige Ecke. In jedem Systeme sind zu unterscheiden *p*flächige Spitzlinge der 1sten und 2ten oberen und wieder solche der 1sten und 2ten unteren Stellung. Bei jenen liegt der Scheitel am äusseren Ende des oberen Hauptstrahls, bei diesen an dem des unteren. Für $p = 2$ erhält man, anstatt des *p*flächigen Spitzlings, einen quergipfelkantigen 2flächigen Schiefwandner. Die beiden Flächen einer solchen Gestalt sind zu betrachten als 2fach 1gliedrige, und die horizontale Gipfelkante, welche sie bilden, ist eine 2fach 2gliedrige Kante. Sie ist Stellvertreter von 2 Scheitelkanten, die hier unter einem Winkel von 180° am äusseren Ende des Hauptstrahls zusammenlaufen. Für $p = 1$ erhält man den 1flächigen Schiefwandner. Seine Fläche hat hier die Bedeutung einer 2fach 1gliedrigen Figur.

---

*) Das Wort *Spitzling* ist ähnlich den Worten Frühling, Spätling gebildet und bedeutet etwas, dessen Haupteigenschaft im Spitzigsein besteht. Das Wort Pyramide bezeichnet einen Spitzling, der durch das Hinzutreten einer Grundfläche zu einer ringsum endlich begrenzten Gestalt geworden ist, welche aber, da sie demnach Flächen verschiedener Art besitzt (Scheitelflächen und Grund- oder Tafelflächen) nicht mehr als einfache Gestalt betrachtet werden darf. Man kann an den *t*flächigen Ebenrandnern und an den *t*flächigen Kronrandnern die *p*flächigen Spitzlinge und an den 2 × *t*flächigen Ebenrandnern, so wie an den 2 × *t*flächigen Kronrandnern die 2 × *p*flächigen Spitzlinge kennen lernen, wenn man die Scheitelkanten, die im einen Scheitel jener Gestalten zusammenlaufen, über die Randecken hinaus verlängert und die dieser Verlängerung entsprechende Verlängerung der Flächen dieses Scheitels gleichfalls stattfinden lässt, während man die Flächen und Kanten des andern Scheitels nicht mit in Betrachtung zieht.

[89] Auch bei den hier erwähnten 2flächigen sowohl als 1flächigen Schiefwandnern hat man eine 1ste und 2te obere und ebenso eine 1ste und 2te untere Stellung zu unterscheiden.

Flächen senkrecht auf 1fach 1gliedrige Strebestrahlen begrenzen im Allgemeinen $2 \times p$flächige Spitzlinge, deren Querschnitte 2fach $p$gliedrige $t$seite oder Lanzen-p-linge sind, z. B. 2×2flächige Spitzlinge (*acroides didiedrica*), 2×3flächige Spitzlinge (*acroides ditriedrica*), 2×4flächige Spitzlinge (*acroides ditetraedrica*). An ihnen haben die Flächen die Bedeutung 1fach 1gliedriger Figuren. Die p einen verhalten sich ebenbildlich zu einander, aber gegenbildlich zu den p übrigen, die unter sich ebenbildlich sind. Der Scheitel ist eine $2 \times p$kantige 2fach $p$gliedrige Ecke. Die Scheitelkanten sind von zweierlei Art. Die p einen sowohl als die p andern sind gleichseitige 2fach 1gliedrige Kanten. Die Grösse bezeichnet den Unterschied der beiden Arten. Werden die Scheitelkanten der beiden Arten an Grösse gleich, so hat der Spitzling scheinbar die Form eines $t$flächigen, aber die Bedeutung seiner Theile bleibt dennoch dieselbe als beim $2 \times p$flächigen Spitzlinge.

Für den Werth $p = 1$ hat man als Stellvertreter des $2 \times p$flächigen Spitzlings einen 2×1flächigen oder 2flächigen schiefgipfelkantigen Schiefwandner. Die beiden Flächen einer solchen Gestalt sind gegenbildlich gleiche 1fach 1gliedrige; die Gipfelkante ist eine gleichseitige 2fach 1gliedrige Kante. Dem scheinbar $t$flächigen Spitzlinge entspricht hier der Fall, wobei die schiefe Gipfelkante sich umwandelt in eine horizontale, man mithin einen 2flächigen quergipfelkantigen Schiefwandner hat, dessen Flächen aber bloss $|=|$ und nicht $\cong$ sind, dessen Gipfelkante gleichfalls eine gleichseitige 2fach 1gliedrige Kante bleibt.

Denkt man sich den Hauptstrahl, welcher einem $p$flächigen Spitzlinge angehört, wachsend, während der Querschnitt unverändert bleibt, so wird der Scheitel der Gestalt immer spitziger, und wird jener Hauptstrahl $= \infty$, so hat man eine $p$flächige Säule, die sich als eine ungleichendige verhält. Ihre Seitenflächen sind 2fach 1gliedrig, ihre Seitenkanten sind ebenfalls gleichseitig 2fach 1gliedrig. Für $p = 2$ ist auch hier ein 2flächiger Gegenseitenwandner vorhanden, dessen Flächen als 2fach 1gliedrige sich verhalten. Für $p = 1$ hat man einen 1flächigen Seitenwandner, dessen Fläche eine 2fach 1gliedrige ist.

Auf ähnliche Weise kann man aus dem 2 $\times$ *p* flächigen Spitzlinge [**90**] die 2 $\times$ *p* flächige Säule ableiten, deren Seitenflächen hier als 1fach 1gliedrige erscheinen, während ihre Seitenkanten gleichseitige 2fach 1gliedrige Kanten sind. Je 2 einer und derselben Kante anliegende Flächen verhalten sich gegenbildlich. Für $p = 1$ hat man als Stellvertreter der 2 $\times$ *p* flächigen Säule einen 2 $\times$ 1flächigen oder 2flächigen Nebenseitenwandner, d. h. 2 Flächen, die in einer gleichseitigen 2fach 1gliedrigen Seitenkante zusammentreffen, sich |=| zu einander verhalten und 1fach 1gliedrig sind.

Die Querschnitte der 2 $\times$ *p* flächigen Säule sind auch im Allgemeinen 2fach *p* gliedrige *t* seite oder Lanzen-*p*-linge. Werden in diesem Querschnitte die zweierlei Winkel einander gleich, so erhält die Säule scheinbar die Form einer *t* flächigen mit regelmässigem *t* seitigen Querschnitte. Die Bedeutung ihrer Theile aber ist wie bei der gewöhnlichen 2 $\times$ *p* flächigen Säule mit ungleichendiger 2fach *p* gliedriger Hauptaxe. Für $p = 1$ hat man als Stellvertreter einer solchen Säule einen 2flächigen Gegenseitenwandner, dessen Flächen hier die Bedeutung von 1fach 1gliedrigen, einander |=| Figuren haben.

Als Beispiele ungleichendiger 2fach *p* gliedriger Gestalten
Fig. 250. mögen dienen: 1) eine 2fach 2gliedrige und 2) eine 2fach
251. 3gliedrige. Durch Zerlegung in die einfachen Gestalten, aus denen sie bestehen, kann man sich den Charakter dieser Gestalten und Gestaltensysteme versinnlichen.

VII. Einfache Gestalten mit ungleichendiger 1fach *p* gliedriger Hauptaxe
(ungleichendige 1fach *p* gliedrige Gestalten).

Wenn *p* grösser als 2 ist, so begrenzen Flächen, welche senkrecht sind auf irgend eine Art von Strebestrahlen, gleichfalls wieder *p* flächige Spitzlinge, die an Form den 2fach *p* gliedrigen Spitzlingen möglicher Weise gleich sind, aber hier sind ihre Flächen 1fach 1gliedrig und ihre Scheitelkanten gleichfalls 1fach 1gliedrig. Ihr Scheitel ist *p* kantig 1fach *p* gliedrig. Wenn $p = 2$ ist, so hat man, statt eines solchen *p* flächigen Spitzlings, einen quergipfelkantigen 2flächigen Schiefwandner, dessen beide Flächen als ebenbildliche 1fach 1gliedrige Figuren zu betrachten sind, während die Gipfelkante eine 1fach 2gliedrige ist. Für $p = 1$ entsteht ein 1flächiger Schiefwandner, dessen Fläche 1fach 1gliedrig ist.

[91] Flächen senkrecht auf Querstrahlen irgend einer Art bilden im Allgemeinen $p$flächige Säulen, deren Seitenflächen sich als $\cong$ verhalten und 1fach 1gliedrig sind. Auch die Seitenkanten verhalten sich als ungleichseitige ungleichendige, d. h. als 1fach 1gliedrige Kanten. Auch in der Reihe dieser $p$flächigen Säulen treten für den Werth $p = 2$ 2flächige Gegenseitenwandner auf. Die beiden Flächen derselben verhalten sich hier $\cong$ und sind 1fach 1gliedrig. Für den Werth $p = 1$ erhält man eben so 1flächige Seitenwandner, deren Fläche 1fach 1gliedrig ist.

VI. Strahlensysteme und Axensysteme hauptaxenloser Gestalten.

1) Allgemeine Lehren.

1) Bei hauptaxenlosen Gestalten ist die geringste Anzahl gleichwerthiger Axen = 3.

2) Diese 3 Axen müssen ebenbildlich gleich sein.

3) Wenn von einer Art Strahlen die Anzahl 4 beträgt, so können nicht zwei derselben in eine gerade Linie zusammenfallen.

4) Auch können in diesem Falle nicht 2 Strahlen sich gegenbildlich verhalten, weil sonst die beiden Flügelflächen, in deren jeder ein solches Paar liegen würde, sich in einer Hauptaxe schneiden müssten.

5) Die Anzahl ebenbildlicher Strahlen einer Art muss daher wenigstens grösser als zwei sein.

6) Eine hauptaxenlose Gestalt muss Axen haben, die höher als 1gliedrig (1fach oder 2fach) sind.

Es seien in ihr a und b zwei nicht in einerlei gerader Linie liegende ebenbildliche Strahlen, welche 1gliedrig sind; man gebe jeder auf gleiche Weise einige Flügelflächen, bringe dann a auf irgend eine Weise an die Stelle, welche vorher b einnahm, so dass die neue Stellung des Strahlensystems der alten ebenbildlich ist; es wird dann entweder: 1) b dieselbe Stelle oder 2) eine andere Stelle einnehmen müssen, als diejenige ist, welche zuvor a inne hatte.

Ist b an die Stelle von a getreten, wenn a in jene von b gebracht worden, so muss, wenn man den Winkel zwischen a und b mittelst eines dritten Strahles v halbirt, dieser Strahl

so beschaffen sein, dass, wenn er als Umdrehungsaxe angewendet wird, die beiden Strahlen a und b durch Umdrehung um 180° mit einander vertauscht werden können; der Strahl c ist daher [92] ein *wenigstens 2gliedriger*. Ist aber b nicht in die Stelle von a versetzt, wenn a in die von b gerückt worden, so muss b die Stelle einnehmen, welche vorher ein dritter, mit a und b ebenbildlicher Strahl einnahm. Legt man nun durch gleichweit vom Mittelpunkte entfernte Punkte in diesen drei Strahlen eine Ebene und zieht durch den Mittelpunkt des Strahlensystems die auf sie senkrechte Axe, so ist einleuchtend, dass in Beziehung auf eine Richtung in dieser Axe die drei Strahlen a, b und c sich ebenbildlich verhalten, dass also diese Axe eine mindestens dreigliedrige sein müsse.

7) Wenn ein hauptaxenloses Strahlensystem 2gliedrige Axen besitzt, so hat es auch Axen, welche drei oder mehrgliedrig sind.

Es seien a und b zwei ebenbildliche 2gliedrige Strahlen, welche nicht in eine und dieselbe Linie zusammenfallen. Man bringe das Strahlensystem in eine der ersten gegebenen Stellung ebenbildliche Stellung, so dass a an die Stelle kommt, welche vorher b einnahm, so muss b entweder 1) an die Stelle von a gerückt sein oder 2) eine andere Stelle einnehmen.

Im ersten Falle wird der Strahl, welcher den Winkel zwischen a und b halbirt, gleichfalls ein 2gliedriger Strahl c sein müssen. Man hat also in einerlei Ebene liegend 3 Strahlen, welche 2gliedrig sind und von denen man weiss, dass die beiden äussersten ebenbildlich sind in Beziehung zum mittleren. Aber ebenso muss in derselben Ebene jeder dieser beiden äusseren Strahlen a und b ein mittlerer sein für zwei ebenbildliche 2gliedrige Strahlen, von denen der eine jener erste mittlere Strahl c ist. Nennt man die mit c als ebenbildlich erkannten beiden neuen Strahlen d und e, so muss der Winkel, welchen c mit d oder mit e macht, gleich dem Winkel sein, welchen a mit b macht, und daher kleiner als 180°. Die Ebene, in welcher diese sämmtlichen Strahlen liegen, hat daher in den 3 Strahlen c, d und e eine Anzahl ebenbildlicher 2gliedriger Strahlen, welche grösser als 2 ist. Zwei 2gliedrige ebenbildliche in einerlei Ebene liegende Strahlen sind aber auch einander ebenbildlich in Beziehung auf die eine Richtung in der auf dieser Ebene senkrecht stehenden Axe, wenn sie einander ebenbildlich sind in

Beziehung auf einen in der Ebene befindlichen zwischen ihnen liegenden Strahl. Es ist nämlich jede der beiden in der erwähnten Ebene liegenden Flügelflächen des einen der beiden [93] verglichenen 2gliedrigen Strahlen ebenbildlich einer jeden der beiden in derselben Ebene liegenden Flügelflächen des andern, weshalb auch jede der beiden auf diese Ebene senkrechten Flügelflächen des einen dieser Strahlen ebenbildlich einer jeden der beiden auf dieselbe Ebene senkrechten Flügelflächen des andern sein muss, so dass also durch Umdrehung um die auf der erwähnten Ebene senkrechte Axe der eine 2gliedrige Strahl so an die Stelle des andern gebracht werden kann, dass jede der 4 der Betrachtung unterworfenen, folglich jede Flügelfläche desselben, an die Stelle einer ihr ebenbildlichen getreten ist und also diese beiden 2gliedrigen ebenbildlichen Strahlen auch einander ebenbildlich sind in Beziehung auf den auf der Ebene, in welcher sie liegen, senkrechten Strahl. Insofern also die drei Strahlen *c*, *d* und *e* in Beziehung zu dem auf der Ebene, in der sie liegen, senkrechten Strahl einander ebenbildlich sind, so muss dieser Strahl 3- oder mehrgliedrig sein.

Im 2ten Falle wird *b* eine Stelle einnehmen müssen, welche vorher ein dritter mit *a* und *b* ebenbildlicher Strahl *c* einnahm. Legt man hier wieder eine Ebene durch drei Punkte, deren jeder in einem dieser 3 Strahlen *a*, *b*, *c* in einerlei bestimmter Entfernung *α* vom Mittelpunkte des Strahlensystems angenommen worden, so wird die auf diese Ebene senkrechte Axe eine 3- oder mehrgliedrige sein müssen, weil durch Umdrehung des ganzen Strahlensystems um sie der Strahl *a* an die Stelle von *b* rückt, wenn *b* an jene gelangt, die vorher *c* einnahm, während zugleich 1) die Flügelfläche von *a*, welche durch *b* geht, an die Stelle der ihr ebenbildlichen Flügelfläche von *b*, die durch *c* geht, getreten ist, mithin *a* eine Stellung erhalten hat, die mit derjenigen, welche *b* zuerst hatte, ebenbildlich ist, und 2) die Flügelfläche von *b*, welche durch *a* geht, an die Stelle der ihr ebenbildlichen Flügelfläche von *c*, welche durch *b* geht, gelangt ist, so dass *b* eine mit der vorigen von *c* ebenbildliche Stellung hat.

8) Die höchst vielgliedrigen Strahlen in hauptaxenlosen Gestalten können nicht höher als 5gliedrig sein. Man nehme an, es seien 6gliedrige Strahlen in hauptaxenlosen Gestalten möglich, so werden, wenn man zwei ebenbildliche Strahlen, die den kleinsten Winkel mit einander bilden, den zwei solche

Strahlen einschliessen können, nachbarliche ebenbildliche Strahlen nennt, einen 6gliedrigen Strahl 6 nachbarliche ihm ebenbildliche [94] Strahlen so umgeben müssen, dass sie bei der durch Umdrehung des ganzen Strahlensystems um jenen ersten 6gliedrigen Strahl bewirkten Vergleichung sich in Beziehung zu ihm als einander ebenbildliche Strahlen verhalten. Von den 6 Flügelflächen, in denen sie liegen, müssen also je 2 benachbarte um $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ gegen einander geneigt sein und alle jene 6 Strahlen müssen gegen jenen einzelnen gleichgeneigt sein, so dass jeder mit ihm einen Winkel α bildet. Es
Fig. 273. sei ca jener erste Strahl, cb und cd seien 2 der 6 nachbarlichen ihm ebenbildlichen Strahlen, welche in benachbarten Flügelflächen acb und acd liegen; man lege durch einen Punkt q in ca eine Ebene dqb senkrecht auf ca, so dass also die Winkel dqc und bqc rechte Winkel sind, mithin der Winkel dqb als Neigungswinkel von dca gegen bca betrachtet werden kann. Es wird nun, da auch $dca = bca = \alpha$ ist, auch $dq = bq$ sein; weil aber dqb hier als Neigungswinkel zweier benachbarter ebenbildlicher Flügelflächen eines 6gliedrigen Strahls $= 60^\circ$ ist, so ist das Dreieck dqb ein gleichseitiges, also $db = bq$. Aber das Dreieck dcb ist gleichschenklig und dbc ein spitzer Winkel. Zieht man dv durch d senkrecht auf cb, so ist die Kathete dv kleiner als die Hypotenuse db im Dreieck dvb, folglich auch kleiner als qb; da nun $dc = bc$, so ist $vd : dc < qb : bc$, d. h. der Winkel $dcb < bca$. Da nun aber $bca = \alpha$, d. h. der kleinste Winkel sein soll, den zwei solche 6gliedrige ebenbildliche Strahlen einschliessen können, so heisst dieses: in hauptaxenlosen Gestalten müssen zwei 6gliedrige ebenbildliche Strahlen cd und cb einen Winkel einschliessen, welcher kleiner ist, als der kleinste, den zwei derartige 6gliedrige Strahlen einschliessen können, was ein wahrer Widerspruch ist. 6- und mehrgliedrige Strahlen sind also in hauptaxenlosen Gestalten nicht möglich.

9) Nur bei der hauptaxenlosen Gestalt mit unendlich vielen unendlich vielgliedrigen Axen, bei der Kugel, verschwindet die Ungleichheit zwischen den unendlich kleinen Winkeln, die unseren Winkeln bca und bcd entsprechen.

10) Wenn ein $p$gliedriger Strahl in einem hauptaxenlosen Strahlensysteme 3- oder mehrgliedrig ist, so ist die Anzahl der ihm nachbarlichen ebenbildlichen Strahlen nicht grösser

als p. Dass sie nicht kleiner als p sein darf, ergiebt sich aus dem $p$gliedrigsein, [**95**] sie könnte aber $2p$ oder allgemeiner np sein; da aber der kleinste Werth von $p = 3$ ist, so würde $2p$ schon 6 geben. Es müsste dann einer der 3 einen zwischen zweien der 3 andern liegen, entweder beiden in *gleichem* Grade benachbart, oder dem einen mehr als dem andern. Jedenfalls würden dann zwei ebenbildliche derartige Strahlen einander mehr benachbart sein, als zwei nachbarliche solche Strahlen, was mit dem oben gegebenen Begriffe der nachbarlichen Strahlen im Widerspruche steht.

11) Wenn daher ein 3- oder mehrgliedriger Strahl a' zu den nachbarlichen Strahlen eines andern ihm ebenbildlichen Strahles a gehört und in einer Flügelfläche β desselben liegt, so muss auch der Strahl a ein eben solcher nachbarlicher Strahl von a' sein und in einer Flügelfläche β' von diesem auf gleiche Weise liegen, so dass die Flügelfläche β' des Strahles a' ebenbildlich ist der Flügelfläche β des Strahles a.

12) Beide Flügelflächen β und β' fallen aber zusammen in die Ebene zwischen a und a'; *der Strahl d, welcher den Winkel zwischen a und a' halbirt, muss sonach ein 2gliedriger* Strahl sein; denn wenn durch Umdrehung um ihn die beiden Strahlen a und a' vertauscht werden, so sind auch die ebenbildlichen Flügelflächen β und β' vertauscht, die deshalb auch für den Strahl d ebenbildliche Flügelflächen sind, weshalb er, da die Neigung dieser Flügelflächen $= \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ ist, ein 2gliedriger Strahl sein muss.

13) Wenn ein Strahl in einem hauptaxenlosen Strahlensysteme 4- oder 5gliedrig ist, so sind je zwei ihm nachbarliche und ebenbildliche Strahlen, welche in nachbarlichen ebenbildlichen Flügelflächen desselben liegen, auch gegen einander nachbarliche ebenbildliche Strahlen. Es sei ca jener erste, cd und cb die beiden andern derartigen Strahlen. Es ist dann $acd = acb$ oder der Bogen ad = dem Bogen ab. Ist dann dcb nicht $= acb$ oder der Bogen db nicht = dem Bogen ab, so müsste der Bogen db grösser als der Bogen ab sein; denn wäre $db < ab$, so würden ca und cb nicht nachbarliche Strahlen sein. Es sei daher der Bogen $db > ab$, so wird auch in dem gleichschenkligen sphärischen Dreiecke bad der Winkel dab grösser als der Winkel abd sein müssen. Es sei nun ferner ach eine Flügelfläche von ca, die zu acb die rechte nachbarliche ebenbildliche ist, wenn acd Fig. 274.

die linke ist, und ch sei der [**96**] in ihr liegende, zu ca nachbarliche ebenbildliche Strahl. Da nun ca und cb ebenbildliche nachbarliche 4- oder 5gliedrige Strahlen sind, so ist der Strahl cn, welcher den Winkel zwischen beiden halbirt, ein 2gliedriger Strahl. Nimmt man ihn als Umdrehungsaxe, um cb mit ca zu vertauschen, so wird der Winkel ahb, da er $= abd$ ist, kleiner als dab sein und daher die Seite bh zwischen ad und ab liegen müssen, z. B. so wie af, so dass $baf = abd$ ist. Umgekehrt wird ah nicht zwischen ba und bd, sondern über bd hinaus fallen müssen, weil $bah = bad$, also $> abd$ ist. Sie liege wie bf, so dass $abf = bad$ ist; es ist dann der Strahl cf, als ein dem Strahle ch ebenbildlicher, auch den Strahlen ca und cb und cd ebenbildlich. Es ist nun $af = bd$, aber auch $ag = bg$ (weil $gab = gba$ ist), daher auch $gd = gf$. Es kann aber df nicht kleiner als ab sein, weil sonst ca und cb nicht nachbarliche Strahlen sein würden. Ist aber $df = ab = ad$, so muss auch $dbf = dba$, mithin $abf = bad = 2\,abd$ sein; ist $df > ab$ oder $df > ad$, so muss $dbf > dba$, mithin abf $(= bad) >$ $2\,abd$ sein. In dem gleichschenkligen sphärischen Dreiecke dab aber sind bei unverändertem Winkel bad die Winkel abd und adb um so kleiner, je kleiner die Bogen ad und ab sind; sie werden daher am kleinsten sein, wenn $ad = bd =$ Null wird. Dann ist $abd + adb = 2\,R - bad$ und

$$abd = \tfrac{1}{2}\,(2\,R - bad).$$

Ist dann ca ein 5gliedriger Strahl, so ist $bad = \tfrac{4}{5}\,R = 72^\circ =$ dem Mittelpunktswinkel des regelmässigen Fünfecks, daher $= \tfrac{1}{2}\,(2\,R - 72^\circ) = 54^\circ =$ dem halben Umfangswinkel des regelmässigen Fünfecks. Da nun $2 \times 54^\circ = 108^\circ > 72^\circ$ ist, so kann abf oder bad nicht $\overline{\gtrless}\ 2\,abd$ sein, weil selbst der kleinste Werth von abd, welcher hier nicht erreicht werden darf (indem sonst die Strahlen ca, cb, cd u. s. w. in einen und denselben Strahl zusammenfallen würden), grösser als $\tfrac{1}{2}\,bad$ ist. Es muss daher für die 5gliedrigen Strahlen ca, cb, cd gelten, dass Bogen $bd = ba = da$.

Ist der Strahl ca 4gliedrig, so ist $bad = 90^\circ = R$ und $\tfrac{1}{2}\,(2\,R - R) = \tfrac{1}{2}\,R = 45^\circ$, folglich der kleinste Werth von $abd = 45^\circ$, so dass $2\,abd = bad$ sein könnte. Dieser kleinste Werth darf aber nicht erreicht werden, wenn nicht die Strahlen [**97**] ca, cb, cd u. s. w. zusammen in einen fallen sollen; daher muss auch hier Bogen $bd = ba = da$ sein.

Sowohl bei 5gliedrigen als auch bei 4gliedrigen Strahlen ca, cb, cd u. s. w. ist dann also $dba = bda = bad$; folglich für den Strahl cb die Flügelfläche dcb ebenbildlich der Flügelfläche acb. In Beziehung auf cb ist also cd ebenbildlich mit ca und ebenso umgekehrt in Beziehung auf cd ist $cb \cong ca$, folglich sind cb und cd nachbarliche ebenbildliche Strahlen.

14) Nimmt man daher in drei solchen 4- oder 5gliedrigen, einander gegenseitig nachbarlichen, Strahlen Punkte an, welche gleichweit entfernt vom Mittelpunkte des Strahlensystems sind, und legt durch diese drei ebenbildlichen Punkte eine Ebene, so ist der auf diese Ebene senkrecht zu fällende Strahl ein 3gliedriger.

15) Sind die Strahlen ca, cb, cd dreigliedrige Strahlen, so ist $bad = 120^{\circ}$. Es ist dann $\frac{1}{2}(2R - 120^{\circ}) = 30^{\circ}$ und $2 \times 30 < 120$. Es kann daher hier sowohl $bd = ab$ oder ad sein, als auch grösser.

16) Wenn $bd = ab = ad$ ist, so muss $abd = adb =$ Fig. 274 u. 275.
$bad = 120^{\circ}$ sein. Legt man durch die Punkte b, a und d eine Ebene, so ist dann der auf diese Ebene senkrechte Strahl ce ein *dreigliedriger*, der aber nicht mit ca, cb, cd ebenbildlich sein kann, weil er mit ca einen Winkel eca bildet, der kleiner als acb ist, was daraus sich ergiebt, dass $aeb = 120^{\circ}$ und $eba = 60^{\circ}$ ist, folglich kleiner als aeb, so dass der Bogen $ae < ab$ sein muss; es würde dann cb nicht ein dem ca nachbarlicher Strahl sein. Die drei 3gliedrigen Strahlen ca, cb und cd schneiden sich im Mittelpunkte c, so dass die drei Ebenen acb, bcd, dca eine 3kantige 3winklige Ecke bilden, bei der jede Kante $=$ 120° misst.

17) Ist $bd > ab$, so muss der Strahl, welcher senkrecht Fig. 274.
auf die Ebene, die durch a, b, d gelegt werden kann, ein 4- oder 5gliedriger sein; denn dass er nicht 3gliedrig sein könne, ist aus dem eben Gesagten einleuchtend; dass er aber höher als 2gliedrig sein müsse, ergiebt sich daraus, dass durch Umdrehung des Strahlensystems um ihn cd an die Stelle von ca kommt, wenn ca an die Stelle von cb tritt u. s. w.

18) Ist der auf die Ebene durch a, b und d senkrechte Strahl 4gliedrig, so muss $abd = adb = \frac{1}{2} \times 120^{\circ} = 60^{\circ}$ und ausser den 3 Strahlen ca, cb, cd muss noch ein vierter 3gliedriger Strahl vorhanden sein, der in Beziehung zu jenem

4gliedrigen [98] mit den 3 genannten ebenbildlich ist, und diese 4 Strahlen schneiden sich im Mittelpunkte c, so dass die durch je zwei nachbarliche derartige Strahlen gelegten Ebenen 4kantige 4winklige Ecken bilden, an denen jede Kante 120° misst.

19) Ist der auf die Ebene, die durch a, b, d gelegt wurde, senkrechte Strahl ein 5gliedriger, so muss er von 5 solchen in Beziehung zu ihm ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen, wie ca, cb, cd u. s. w., zunächst umgeben sein und die Mittelpunktsecke, für welche jene 5 Strahlen als Kanten dienen, ist eine 5kantige 5winklige Ecke, in welcher jede der 5 Kanten = 120° misst. Die Beschaffenheit der verschiedenen hauptaxenlosen Strahlensysteme hängt also vorzüglich ab von den Eigenschaften der 3kantigen oder 4kantigen oder 5kantigen Mittelpunktsecken, deren Kantenlinien 3gliedrige Strahlen sind und von denen man daher weiss, dass jede ihrer Kanten $= \frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$ ist.

Fig. 276. Es sei c, def eine 3kantige Ecke mit Kanten von 120°. Man mache $cd = ce = cf$, lege durch d, e, f die Ebene def, halbire ef in g und de in h, so bestimmt sich die Lage der Hülfsebenen dcg und fch und ausser den Linien cg, ch, dg, hf die Linie cb so, dass cb lothrecht auf def ist u. s. w. Auch ergiebt sich nun die Ebene bce ($= bcf = bcd$). Ziehe hg, dann von dem hierdurch bestimmten Punkte o aus die Linie oi lothrecht auf ce, so ist hierdurch die Ebene hig so bestimmt, dass ce lothrecht auf hig ist und der Winkel $hig = 120^\circ$, der Winkel $hio = gio = 60^\circ$. Daher $io:ig:og = 1:2:\sqrt{3}$, oder auch $gbo = 60^\circ$, also $ob:bg:og = 1:2:\sqrt{3}$, also $bg = ig$. Aber $eg:bg = \sqrt{3}:1$, $eg = bg\sqrt{3}$. Daher

$$eg:ig = bg:bg\sqrt{\tfrac{1}{3}},\ ig = eg\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

$$ie = \sqrt{eg^2 - ig^2} = \sqrt{3\cdot ig^2 - ig^2} = ig\sqrt{2},$$

oder $ie:ig = eg:cg = \sqrt{2}:1$; und $cg = 1$ gesetzt ist

$$eg = \sqrt{2},\ ce = \sqrt{3},\ bg = ig = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

$$ie = \frac{2}{\sqrt{3}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3},\ ci = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = \sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

$$cb = \sqrt{cg^2 - bg^2} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$
$$hg = eg = \sqrt{2},\ ho = og = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$bo = io = \tfrac{1}{2}ig = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \sqrt{\tfrac{1}{6}}$$
$$be = 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 4\sqrt{\tfrac{1}{6}},\ dg = 3\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 6\sqrt{\tfrac{1}{6}}$$
$$co = \sqrt{bo^2 + cb^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

[99] Daraus folgt:

$$\text{Tg.}\ bcg = \frac{bg}{bc} = \frac{\sqrt{\tfrac{2}{3}}}{\sqrt{\tfrac{1}{3}}} = \sqrt{2},\ bcg = 54^\circ\,44'8''$$

$$\text{Tg.}\ bcf = \frac{be}{bc} = \frac{2\sqrt{\tfrac{2}{3}}}{\sqrt{\tfrac{1}{3}}} = 2\sqrt{2},\ bcf = 70^\circ\,31'44''$$

$$\text{Tg.}\ ecg = \frac{eg}{cg} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2},\ ecg = 54^\circ\,44'8''$$

$$\text{Tg.}\,2ecg = \frac{2\ \text{Tg.}\ ecg}{1 - \text{Tg.}\,ecg^2} = \frac{2\sqrt{2}}{1-2} = -\,2\sqrt{2}$$

$$\text{Tg.}\tfrac{1}{2}hcg = \frac{og}{oc} = \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}} = 1,\ \tfrac{1}{2}hcg = 45^\circ,\ hcg = 90^\circ$$
$$2ecg = ecf = 2R - bcf = 109^\circ\,28'\,16''.$$

20) Die Anzahl 3kantiger 3winkliger Mittelpunktsecken mit Kanten von 120° ist aber, sofern je 2 derselben nur eine ihrer Flächen gemeinschaftlich haben sollen, d. h. neben einander nicht ganz oder zum Theil in einander liegen sollen, = 4.

Es sei c, abf eine solche Ecke. Legt man durch ca die Ebene acd so, dass $fca \parallel dca = 120^\circ$, und ebenso durch cf die Ebene fcd so, dass $acf \parallel dcf = 120^\circ$, so ist auch wegen des gemeinschaftlichen Winkels fca die Ecke c, $afd \cong c$, abf, folglich $acd \parallel fcd = 120^\circ$. Wird nun durch cb und cd eine Ebene gelegt, so ist die Ecke c, $abd \cong c$, abf, weil die Kante ca der ersten = der Kante ca der 2ten = 120° (indem 360 — 2 × 120 = 120) und die beiden diese Kante einschliessenden Winkel acb und acd der ersten gleich sind den einschliessenden Winkeln acf und acb der andern. Fig. 277.

Es ist dann auch jede der beiden Kanten *cb* und *cd* der Ecke *c*, *abd* = 120°. Die drei Ebenen *bcf*, *fcd* und *dcb* bilden aber nun eine Ecke *c*, *bfd*, in welcher jede der 3 Kanten = 360° — 2 × 120° = 120°, so dass diese Ecke die 4te Mittelpunktsecke ist.

21) Wenn daher keine Strahlen vorhanden sein sollen, die höher als 3gliedrig (d. h. die 4- oder 5gliedrig) sind, so muss die Anzahl ebenbildlicher 3gliedriger Strahlen = 4 sein. Die 3gliedrigen Strahlen müssen hier nämlich so liegen, dass die 3kantigen Mittelpunktsecken entstehen; denn entständen die 4- oder die 5kantigen, so würden auch 4- oder 5gliedrige Strahlen vorhanden sein müssen. Es werden daher in diesem Falle 3gliedrige Strahlen von zweierlei Art vorhanden sein, nämlich ausser den 4 einen, die als Kanten der 4 Mittelpunktsecken betrachtet [**100**] werden, noch 4 andere, deren jeder als mittlerer Strahl innerhalb einer dieser Mittelpunktsecken anzusehen ist (gleichwie in den beiden andern Fällen die 4gliedrigen oder 5gliedrigen Strahlen solche mittlere Strahlen in den 4kantigen oder 5kantigen Mittelpunktsecken sind).

Es ist einleuchtend, dass die vier 3gliedrigen Strahlen der einen Art nicht ebenbildlich sein können mit denen der andern Art, während die 4 einer und derselben Art angehörigen unter sich ebenbildlich sind. Zwei ebenbildliche nachbarliche 3gliedrige Strahlen, sowohl der einen als auch der andern Art, bilden mit einander einen Winkel von 109°28′16″. Je einer der einen Art bildet mit jedem der 3 ihm nächsten der andern Art einen Winkel von 70°31′44″, mit dem 4ten aber einen solchen von 180°, d. h. er ist dessen Verlängerung.

22) Da nun um jeden 3gliedrigen Strahl 3 ebenbildliche 2gliedrige Strahlen auf gleiche Weise gelagert sein müssen, aber jeder 2gliedrige Strahl zwischen zwei ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen in der Mitte liegt, also zu 2 solchen gehört, so müssen zu den 4 ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen $\frac{4 \cdot 3}{2}$ oder 6 ebenbildliche 2gliedrige Strahlen gehören. Der Winkel, den ein 2gliedriger Strahl mit jedem der zwei nachbarlichen ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen der ersten Art bildet, zwischen denen er liegt, ist $= \frac{109^\circ 28' 16''}{2} = 54^\circ 44' 8''$.

ich mit jedem der beiden nachbarlichen ebenbildlichen 3-edrigen Strahlen der 2ten Art, die ihm zunächst liegen, det er Winkel von $54^\circ 44' 8''$ und liegt demnach auch zwi-nen diesen, den Winkel, den sie bilden, halbirend.

23) Jeder 2gliedrige Strahl ist auf die Ebene zweier dern eben solchen 2gliedrigen Strahlen senkrecht, die 6 enbildlichen 2gliedrigen Strahlen machen also 3 ebenbild-h gleichendige 2gliedrige Axen aus, deren jede auf die iden andern senkrecht ist. Alle übrigen Axen, ausser den fgezählten 3gliedrigen der ersten und 2ten Art und den gliedrigen, sind bloss 1gliedrige Strahlen.

24) Die wichtigsten Verhältnisse einer 4*kantigen* 4*wink-gen Ecke mit Kanten* von 120° ermitteln sich, wenn man i einer solchen Ecke *d*, *ebgh* in den Kantenlinien $de =$ $ = dg$ nimmt, durch *e*, *b*, *g* die Ebene *ebgh* und durch *d*, *b* die [**101**] Ebene *hdb* und durch *e*, *d*, *g* die Ebene *lg* legt, wodurch die Linien *dc*, *eg* und *hb* entstehen, ren erste *dc*, wie leicht einzusehen, im Punkte *c* senkrecht f den beiden andern auf einander senkrechten *eg* und *hb* . Fällt man *ca* aus *c* senkrecht auf *db* und legt durch *a*, *g* die Ebene *eag*, so ist der Winkel *eag* der Neigungs-nkel, welcher die Grösse der Kante *db* misst, also $= 120^\circ$, d $eac = 60^\circ$. Zieht man nun *cf* lothrecht auf *eb* und nn *df* und wieder *fi* parallel mit *eg* und verbindet *d* und durch *di*, so hat man für $cf = 1$: Fig. 278.

$$ef = bf = 1,\ eb = 2$$

$$cb = ec = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$ac : ec = \text{Cotg. } 60^\circ : 1 = \sqrt{\tfrac{1}{3}} : 1 = 1 : \sqrt{3}$$

$$ac = ec\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

$$ae : ac = 1 : \text{Cos. } 60^\circ = 2 : 1$$

$$ae = 2ac = 2\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

$$ab = \sqrt{cb^2 - ac^2} = \sqrt{2 - \tfrac{2}{3}} = \sqrt{\tfrac{4}{3}} = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

$$ac : ab = dc : cb$$

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}} : 2\sqrt{\tfrac{1}{3}} = dc : \sqrt{2}$$

$$1 : \sqrt{2} = dc : \sqrt{2},\ dc = 1$$

$$di = df = \sqrt{2}$$
$$de = db = \sqrt{3}$$
$$da = \sqrt{3} - 2\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \sqrt{\tfrac{9}{3}} - \sqrt{\tfrac{4}{3}} = \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$
$$\text{Tg. } fdc = \frac{fc}{cd} = \frac{1}{1} = 1,\ fdc = 45^{\circ}.$$
$$\text{Tg. } edc = \frac{ec}{cd} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2},\ edc = 54^{\circ}\,44'\,8''.$$
$$\text{Tg. } edf = \frac{ef}{fd} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}},\ edf = 35^{\circ}\,15'\,52''.$$
$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}fdi = \frac{\tfrac{1}{2}fi}{fd} = \frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2},\ fdi = 60^{\circ}.$$
$$\left.\begin{matrix} edb \parallel hdg \\ = ehd \parallel bdg \end{matrix}\right\} = 2 \times 45^{\circ} = 90^{\circ}.$$
$$edb = 2 \times 35^{\circ}\,15'\,52'' = 70^{\circ}\,31'\,44''.$$
$$edg = 2 \times 54^{\circ}\,44'\,8'' = 109^{\circ}\,28'\,16''.$$

Fig. 279. 25) Sind die 3 gliedrigen Strahlen so vertheilt, dass 4 kantige 4 winklige Mittelpunktsecken entstehen, so ist die Anzahl dieser Ecken = 6. Es sei *c, bihd* eine solche Ecke mit Kanten von 120°. Legt man durch den 3 gliedrigen Strahl *cd* die Ebene *dcf*, so dass sie gegen *dch*, folglich auch gegen *dcb* um 120° [**102**] geneigt ist, so wird in ihr der Strahl *cf* so liegen müssen, dass der Winkel *dcf* = *dcb* = *dch*. Legt man durch ihn die Ebene *fcg* und durch *ch* die Ebene *hcg* so, dass *fcg* ‖ *fcd* = *hcg* ‖ *hcd* = 120°, so ist die Ecke *c, dfgh* ≌ *c, bdhi*, folglich der Winkel *fcg* = *hcg* = *dch* = *fcd*, mithin *cg* der zu *cf*, *cd*, *ch* gehörige vierte 3gliedrige ebenbildliche Strahl. Wird nun durch *cf* die Ebene *acf* und durch *cb* die Ebene *acb* so gelegt, dass *acf* ‖ *dcf* = *acb* ‖ *dcb* = 120°, so ist die Ecke *c, abdf* ≌ *c, bihd* u. s. w., mithin der Winkel *acb* = *bcd* = *acf* = *dcf*, folglich *ca* der zu *cb*, *cd*, *cf* gehörige 4te ebenbildliche 3 gliedrige Strahl, welcher zu *cb* sowohl als zu *cf* nachbarlich ist. Es ist dann *acb* ‖ *icb* = 120°. Wird durch *ca* die Ebene *kca* und durch *ci* die Ebene *kci* so gelegt, dass *kca* ‖ *bca* = *kci* ‖ *bci* = 120° ist, so ist die Ecke *c, abik* ≌ *c, bdhi* u. s. w., folglich der Winkel *ack* = *acb*

$= bci = ick$ und also ck der zu ca und ci nachbarliche ebenbildliche 3gliedrige Strahl, welcher zu ca, cb, ci als 4ter Strahl gehört. Wird durch ck und cg eine Ebene gelegt, so wird die Ecke $c, afgk \cong c, dbih$ sein müssen, weil sie mit ihr übereinstimmt in Ansehung dreier Winkel und der 2 von diesen Winkeln eingeschlossenen Kanten. Es muss daher $fcg \parallel kcg = ack \parallel gck = 120^\circ$ und der Winkel $kcg = fcg$ u. s. w. sein, so dass ck auch ein zu cg nachbarlicher ebenbildlicher 3gliedriger Strahl ist. Die nun noch übrigbleibende Ecke $c, kghi$ hat 4 Kanten, deren jede $= 360^\circ - 2 \times 120^\circ = 120^\circ$ ist und deren einander gleiche Winkel mit denen der 5 bisher betrachteten Ecken übereinstimmen; es ist daher die 6te solche Mittelpunktsecke.

26) Es ergiebt sich daraus die Anzahl der ebenbildlichen 4gliedrigen Strahlen = 6, die der ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen $\frac{6 \times 4}{3} = 8$ und die der ebenbildlichen 2gliedrigen Strahlen $\frac{6 \times 4}{2} = \frac{8 \times 3}{2} = 12$.

Es sei fdc ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck $= fdc$ von Fig. 278. Man bilde das aus 8 solchen Dreiecken bestehende Quadrat $ff'f''f'''$. Ferner sei die Verbindung der beiden Dreiecke dcr und dcg gleich der ebenso bezeichneten von Fig. 278 und cd, ed und gd seien über d hinaus so weit verlängert, bis die Verlängerung dem Verlängerten gleich und [**103**] hierdurch die Figur $e'g'ge$ bestimmt ist, so wird, wenn $dn \#\ ec$ ist, auch das Dreieck $dne \,|\!=\!|\, ecd$ sein. Auch sei fdi gleich dem gleichseitigen Dreiecke fdi in Fig. 278 und das Sechseck sei eine Verbindung von 6 solchen Dreiecken. Vergleicht man nun die Figuren 278 bis 282, und berücksichtigt man das unter 24) Gesagte, so ergeben sich folgende Sätze. Fig. 280. Fig. 281. Fig. 282.

Zwei nachbarliche 3gliedrige Strahlen bilden einen Winkel $\alpha = 70^\circ 31' 44''$ (edb Fig. 278).

Zwei nebennachbarliche 3gliedrige Strahlen bilden einen Winkel $\beta = 109^\circ 28' 16''$ (edg Fig. 278), so dass $\beta = 180^\circ - \alpha$. Zwei 3gliedrige Strahlen bilden eine ebenbildlich gleichendige Axe; die 8 derartigen Strahlen geben mithin 4 ebenbildlich gleichendige 3gliedrige Axen.

Jeder 4gliedrige Strahl bildet mit jedem ihm nachbarlichen ebenbildlichen Strahle einen Winkel $= 2 \times 45^\circ = 90^\circ$

(2 · *fdc* Fig. 278, *cdc''* Fig. 280). Daher bilden die 6 4gliedrigen Strahlen 3 auf einander senkrechte ebenbildlich gleichendige 4gliedrige Axen.

Die Neigung des 4gliedrigen Strahles zu den nächsten 3gliedrigen ist $= 54^\circ 44' 8''$ (*edc* Fig. 278 und 281); die Neigung desselben zu den entfernteren

$$= 54^\circ 44' 8'' + 70^\circ 31' 44''$$
$$= 125^\circ 15' 52''$$
$$= 180^\circ - 54^\circ 44' 8''$$ (*cde'* Fig. 281).

Jeder 2gliedrige Strahl macht mit jedem der beiden ihm nächsten 3gliedrigen Strahlen Winkel von $35^\circ 15' 52''$ (*fde* und *fdb* Fig. 278), mit den 4 weiter entlegenen aber solche von 90° (*fdg* und *fdh* Fig. 278), mit den 2 entferntesten solche von $180^\circ - 35^\circ 15' 52'' = 144^\circ 44' 8''$ (*ndg* Fig. 281). Mit den beiden ihm nächsten 4gliedrigen Strahlen bildet er Winkel von 45° (*fdc* Fig. 278); auf die beiden weiter entfernten ist er senkrecht (*cdn* und *c'dn* Fig. 281). Mit den beiden am weitesten entfernten 4gliedrigen Strahlen macht er Winkel von 135° (*fdc'''* und *fdc'* Fig. 280).

Jeder 2gliedrige Strahl bildet mit jedem der 4 ihm nachbarlichen ebenbildlichen Strahlen Winkel von 60° (*fdi* Fig. 278 und 282). Auf die beiden entfernteren ist er senkrecht *fdf'* und *fdf'''* Fig. 280). Mit jedem der 4 noch weiter entfernten macht er einen Winkel $= 120^\circ$ (*idn* Fig. 282). Der 12te fällt in die Verlängerung von ihm über den Mittelpunkt hinaus, so dass also die 12 ebenbildlichen 2gliedrigen Strahlen 6 ebenbildlich gleichendige 2gliedrige Axen bilden (*fdf''* Fig. 280 und 282).

Fig. 283. [**104**] 27) Die wichtigsten Verhältnisse einer 5kantigen 5winkligen Ecke *o*, *dbehm* mit Kanten von 120° ergeben sich, wenn man drei einander zunächst liegende Kantenlinien *od*, *ob*, *oe* derselben gleich lang macht und durch die so entstehenden 3 Endpunkte dieser Linien eine Ebene *dbehm* legt. Sie ist eine regelmässig 5seitig begrenzte Ebene und durch sie werden alle 5 Kantenlinien der fraglichen Ecke in gleicher Länge abgeschnitten, so dass $om = oh = od = ob = oe$ ist. Eine von *o* aus auf diese Ebene senkrecht gefällte Linie trifft den Mittelpunkt *c* derselben. Die Linien *ce*, *cb*, *cd* u. s. w. sind daher senkrecht auf *oc*.

Fig. 284. Es sei *behmd* dieses regelmässige Fünfeck, in welchem die Diagonalen *de*, *em*, *mb*, *bh*, *hd* und die Perpendikel

bk, el, hg und mf gezogen sind; o, $cdbe$ sei der Theil, Fig. 285.
elchem die Linien cd, cg, cb, cf, ce, de jenen gleich-
gen entsprechen. Man ziehe en senkrecht auf ob und
inde d und n durch dn, so ist der Winkel end der
ungswinkel $eob \parallel dob = 120^0$; der Punkt a, in welchem
ınd cb sich schneiden, werde durch an mit n verbunden,
ıt $and = ane = \frac{1}{2} dne = 60^0$. Zieht man og und of
gf, so wird gf mit gf von Fig. 284 übereinstimmen.
hat dann, wenn $ca = 1$ ist,

$$ca = 1$$ Fig. 284.

$$ab = \sqrt{5}$$ Fig. 285.

$$cb = cd = \sqrt{5} + 1$$ Fig. 283.

$$gf = ae = ad = \sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 2)}$$

$$ed = 2\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 2)}$$

$$be = \sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)}$$

$$bf = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)}$$

$$fc = \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)^2$$

$$an = \sqrt{\tfrac{1}{3}\sqrt{5}(\sqrt{5} + 2)}$$

$$en = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}\sqrt{5}(\sqrt{5} + 2)}$$

$$bn = \sqrt{\tfrac{2}{3}\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)}$$

$$oc = \sqrt{5} + 2$$

$$ob = \sqrt{3\sqrt{5}(\sqrt{5} + 2)}$$

$$of = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 2)} = \frac{2\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 2)}}{\sqrt{5} - 1}.$$

] Setzt man $oc = 1$, so hat man

$$oc = 1$$

$$ob = \sqrt{\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5} + 2}} = \sqrt{3\sqrt{5}(\sqrt{5} - 2)}$$

$$of = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} + 1}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)}$$

$$bc = 3 - \sqrt{5}$$
$$fc = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$
$$bf = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)(3-\sqrt{5})} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\,\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}}$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}$$
$$be = (\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}$$
$$ae = gf = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}} = \sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}$$
$$an = ae\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \sqrt{\tfrac{1}{3}\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}$$
$$ne = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}$$
$$\sqrt{5} = 2{,}23606753\ \ldots .$$

$$\text{Tg. } boc = \frac{bc}{oc} = 3 - \sqrt{5}, \qquad boc = 37^\circ 22' 38'', 52$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Tg. } cof = \dfrac{fc}{oc} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1), \\ \text{Tg. } 2cof = 2,\end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} cof = 31^\circ 43'\ \ 2'', 91 \\ 2cof = 63^\circ 26'\ \ 5'', 82\end{array}$$

$$\text{Tg. } bof = \frac{bf}{of} = \tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5}), \qquad bof = 20^\circ 54' 18'', 56$$

$$\text{Sin. } 2bof = \tfrac{2}{3}, \qquad boe = 41^\circ 48' 37'', 13$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}doe = \frac{ae}{bo} = \sqrt{\tfrac{1}{3}}, \qquad \left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}doe = 35^\circ 15' 51'', 77 \\ doe = 70^\circ 31' 43'', 55\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sin. } \tfrac{1}{2}gof = \dfrac{\tfrac{1}{2}gf}{of} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1), \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{\sqrt{5}+1},\end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l}\tfrac{1}{2}gof = 18^\circ \\ gof = 36^\circ\end{array}$$

$$gof = bme = bfc = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$
$$mbe = 2 \times 36^\circ = 72^\circ$$
$$dbe = 3 \times 36^\circ = 108^\circ$$
$$gfe = 4 \times 36^\circ = 144^\circ$$
$$cbe = 3 \times 18^\circ = 54^\circ.$$

[106] Daher erhält man in dem Falle, in welchem die 3gliedrigen Strahlen so vertheilt sind, dass 5kantige 5winklige Mittelpunktsecken mit Kanten von 120° entstehen, folgende Sätze. Es sind vorhanden:

1) 12 solche Mittelpunktsecken; daher
2) 12 ebenbildliche 5gliedrige Strahlen;
3) 20 ebenbildliche 3gliedrige Strahlen;
4) 30 ebenbildliche 2gliedrige Strahlen.
5) Ausser den erwähnten Strahlen sind alle andern 1-gliedrige.
6) Die 2-, 3- und 5gliedrigen Axen sind ebenbildlich gleichendig.

Es ist nämlich die Neigung eines 5gliedrigen Strahles zu jedem der 5 nachbarlichen, ihm ebenbildlichen Strahlen $= 2 \cdot cof = 63^\circ 26' 5'',82$, zu jedem der 5 folgenden $= 116^\circ 33' 54'', 18$, zu dem 12ten $= 180^\circ$. Die Neigung eines 3gliedrigen Strahles zu den drei ihm nachbarlichen ebenbildlichen ist $= 2 \cdot bof = boe = 41^\circ 48' 37'', 13$,
zu den 6 nächstfolgenden $= doe = 70^\circ 31' 43'', 55$,
zu den 6 folgenden $= 109^\circ 28' 16'', 45$,
zu den 3 entfernteren $= 138^\circ 11' 22'', 87$,
zu dem 20sten $= 180^\circ$,
zu jedem der 3 nächsten 5gliedrigen Strahlen $= boc = 37^\circ 22' 38'', 52$,
zu jedem der 3 folgenden 5gliedrigen Strahlen $= boe + boc = 79^\circ 11' 15'', 65$.
Die Neigung eines 2gliedrigen Strahles zu den vier nachbarlichen, ihm ebenbildlichen ist $= gof = 36^\circ$,
zu jedem der nächsten $= 60^\circ$,
zu den 4 folgenden $= 2 \cdot gof = 72^\circ$,
zu den 4 folgenden $= 90^\circ$,
zu den 2 nächsten 3gliedrigen $= bof = 20^\circ 54' 18'', 56$,
zu den 2 nächsten 5gliedrigen $= cof = 31^\circ 43' \; 2'', 91$.

28) Aus der Eigenschaft der 2gliedrigen Strahlen, das doppelte Vorhandensein eines jeden andern Strahles so zu bedingen, dass in einer und derselben Ebene mit ihm je 2 ebenbildliche Strahlen liegen müssen, die mit ihm gleiche Winkel bilden, und aus der Eigenschaft des 1gliedrigen Strahles als eines solchen, nicht zu zwei Strahlen sich ebenbildlich zu verhalten, geht hervor, dass die Anzahl der ebenbildlichen 1gliedrigen Strahlen jeder Art in jedem Falle zweimal so

gross sein müsse, als die [**107**] der 2gliedrigen Strahlen; sie ist daher, wenn die höchstvielgliedrigen Strahlen

1) 3gliedrig sind, $= 2 \times 6 = 12$,
2) 4gliedrig sind, $= 2 \times 12 = 24$,
3) 5gliedrig sind, $= 2 \times 30 = 60$.

29) In hauptaxenlosen Strahlensystemen sind die 5gliedrigen, 4gliedrigen und die 2gliedrigen Axen stets ebenbildlich gleichendig, die 3gliedrigen aber nur dann, wenn sie nicht die höchstvielgliedrigen Axen sind.

30) Sind aber die 3gliedrigen Axen die höchstvielgliedrigen, so sind sie nicht ebenbildlich gleichendig, und es sind hier 2 Fälle möglich, entweder a) sind sie *gegenbildlich*, nicht ebenbildlich *gleichendig*, oder b) *ungleichendig*.

31) Ein 3gliedriger Strahl kann aber entweder 2fach oder 1fach 3gliedrig sein, d. h. ein solcher Strahl kann dem ihm im Gegenbilde des gegebenen Strahlensystems entsprechenden Strahle ebenbildlich sein oder nicht. Ebenbildlich gleichendige 3gliedrige Axen müssen daher entweder ebenbildlich gegenbildlich gleichendig sein oder bloss ebenbildlich gleichendig.

32) Wenn die 3gliedrigen Axen in hauptaxenlosen Gestalten gleichendig sind, so können sie *nicht gleichstellig 2-endig sein.* Bei den bloss ebenbildlich gleichendigen 1fach 3gliedrigen Axen ist dieses an sich klar. Bei den bloss gegenbildlich gleichendigen 1fach 3gliedrigen und den gleichendigen 2fach 3gliedrigen folgt es daraus, dass jeder 3gliedrige Strahl 3 ihm nachbarliche 3gliedrige Strahlen hat, deren Verlängerungen über den Mittelpunkt hinaus sich zu seinem solchen Verlängerungsstrahle als die zu diesem gehörigen nachbarlichen einander ebenbildlichen Strahlen verhalten, so dass also Flügelflächen jener mittleren 3gliedrigen Axe vorhanden sind, in welchen jede dieser Axe parallele Linie eine ungleichendige ist. Die (ebenbildlich oder nicht ebenbildlich) gegenbildlich gleichendigen 3gliedrigen Axen in hauptaxenlosen Gestalten- oder Strahlensystemen können daher bloss gerenstellig gleichendig sein.

33) Die sämmtlichen möglichen Fälle sind daher folgende. Es sind vorhanden entweder

1) 4 ungleichendige 1fach 3gliedrige Axen, oder
2) 4 ungleichendige 2fach 3gliedrige Axen, oder
3) 4 gerenstellig gleichendige 1fach 3gliedrige, oder

4) 4 ebenbildlich gleichendige 1fach 3gliedrige, oder
[108] 5) 4 gerenstellig gleichendige 2fach 3gliedrige, oder
6) 10 ebenbildlich gleichendige 1fach 3gliedrige, oder
7) 10 gerenstellig gleichendige 2fach 3gliedrige Axen.

Man kann daher die sämmtlichen hauptaxenlosen Strahlensysteme auf folgende Weise abtheilen und benennen:

A. Hauptaxenlose Strahlensysteme mit 4 3gliedrigen Axen:
4*axige Strahlensysteme.*

Diese zerfallen in

1) solche, bei welchen die 8 vorhandenen 3gliedrigen Strahlen ebenbildlich sind:
8*strahlige Systeme* (im weiteren Sinne).

Diese Strahlen sind a) 2fach 3gliedrig:
2*fach* 3*gliedrig* 8*strahliges System*, *regelmässiges* 8*strahliges System;* abgekürzt: 8*strahliges System* (im engeren Sinne);

b) 1fach 3gliedrig:
1*fach* 3*gliedrig* 8*strahliges System*, *unregelmässiges* 8*strahliges System.*

2) Die 8 3gliedrigen Strahlen zerfallen in 2 Abtheilungen, deren jeder 4 ebenbildliche 3gliedrige Strahlen angehören, die den 4 andern nicht ebenbildlich sind:
4*strahliges System* (im weiteren Sinne).

a) Die 4 einen sind den 4 andern gleichwerthig, aber nicht ebenbildlich, sondern gegenbildlich:
1*fach* 3*gliedrig* 2 $\times$ 4*strahliges System*; abgekürzt: 2 $\times$ 4*strahliges System.*

b) Die 4 einen sind den 4 andern nicht gleichwerthig;
1 $\times$ 4*strahliges System.*

aa) Diese Strahlen sind 2fach 3gliedrig:
2*fach* 3*gliedrig* 4*strahliges System*, auch schlechthin 4*strahliges System* (im engeren Sinne).

bb) Diese Strahlen sind 1fach 3gliedrig:
1*fach* 3*gliedrig* 4*strahliges System*, *unregelmässiges* 4*strahliges System.*

B. Hauptaxenlose Strahlensysteme mit 10 3gliedrigen Axen:
10*axiges Strahlensystem*,
20*strahlige Systeme* (im weiteren Sinne).

1) Die 20 3gliedrigen Strahlen sind 2fach 3gliedrig:
2*fach* 3*gliedrig* 20strahliges System,

[**109**] *regelmässiges* 20*strahliges System* oder schlechthin 20*strahliges System* (im engeren Sinne).

2) Die 20 Strahlen sind 1fach 3gliedrig:
1*fach* 3*gliedrig* 20*strahliges System*,
unregelmässiges 20*strahliges System.*

C. Hauptaxenloses Strahlensystem mit unendlich vielen unendlich vielgliedrigen Axen: ∞*strahliges System*, Kugel.

34) Die Flügelflächen eines 2fach 3gliedrigen Strahles, welche durch die ihm ebenbildlichen nachbarlichen Strahlen gehen, sind doppelte Flügelflächen desselben. Daher sind auch jene Flügelflächen von ihm, die diesen über den fraglichen Strahl hinaus gerade entgegengesetzt sind, d. h. welche die 120° betragende Neigung zweier solcher gleichwerthigen doppelten Flügelflächen halbiren, ebenfalls doppelte Flügelflächen.

35) Sind die 3gliedrigen Strahlen 2fach 3gliedrig, so sind auch die vorhandenen 2- und 4- oder 5gliedrigen Strahlen 2fach $p$gliedrige Strahlen. Denn die doppelten Flügelflächen der 3gliedrigen Strahlen sind auch doppelte Flügelflächen für die in diesen Flügelflächen liegenden 2gliedrigen Strahlen sowohl, als auch für die 4- oder 5gliedrigen.

36) Sind 2fach 3gliedrige ungleichendige Axen vorhanden, so müssen die dazu gehörigen 2fach 2gliedrigen Axen gerenstellig gleichendig sein. Als 2fach $p$gliedrige Axen können sie bloss gleichstellig oder gerenstellig 2endig sein. Wären sie gleichstellig 2endig, so müsste jede einer solchen Axe parallele Linie eine gleichendige sein. Da nun aber der 2gliedrige Strahl in der Ebene 2er ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen liegt, den Winkel, den sie bilden, halbirend, und da die Verlängerungen der 3gliedrigen Strahlen nicht den verlängerten gleichwerthig sind, so ist einleuchtend, dass demnach die 2fach 2gliedrige Axe in diesem Falle Flügelflächen habe, in denen jede dieser Axe parallel liegende Linie eine ungleichendige ist. Da nun die 2fach 2gliedrige Axe sonach nicht gleichstellig 2endig sein kann, so muss sie gerenstellig 2endig sein.

37) Wenn in einem hauptaxenlosen Strahlensysteme 1fach 3gliedrige gerenstellig gleichendige Axen vorhanden sind, so sind die vorhandenen 2gliedrigen Axen gleichstellig 2endig 2fach 2gliedrig. Dass sie 2fach 2gliedrig sind, ergiebt sich

daraus, dass, wenn bei Vergleichung des fraglichen Strahlensystems mit dem Gegenbilde desselben die einen 4 ebenbildlichen 3gliedrigen [110] Strahlen zusammenfallen mit den Gegenbildern der 4 andern 3gliedrigen Strahlen (die zu den 4 ersten sich, wie bekannt ist, gegenbildlich verhalten), die Gegenbilder der 2gliedrigen Strahlen mit den 2gliedrigen Strahlen selbst zusammenfallen müssen, weil in dem gegebenen Strahlensysteme keine andern 2gliedrigen Strahlen mehr vorhanden sind, ausser den 6, welche einander ebenbildlich sind. Dass dann jene Flügelflächen eines solchen 2fach 2gliedrigen Strahles, welche durch die nachbarlichen 2gliedrigen Strahlen gehen, aus demselben Grunde auch mit Gegenbildern derartiger Flügelflächen zusammenfallen, also doppelte Flügelflächen sein müssen, ist aus demselben Grunde ebenfalls einleuchtend. Weil nun die drei 2gliedrigen Axen auf einander senkrecht sein müssen, indem ihre Anzahl nicht grösser als 3 ist, so folgt, dass in jeder doppelten Flügelfläche einer solchen Axe ein 2fach 2gliedriger Strahl so liegt, dass er senkrecht auf die fragliche Axe ist, und daher muss diese eine gleichstellig 2endige sein.

38) Auf dieselbe Weise wird dargethan, dass, wenn 3 auf einander senkrechte 2fach 4gliedrige Axen vorhanden sind, diese gleichstellig 2endig sein müssen. Man kann nämlich sowohl die auf eine 2fach 4gliedrige Axe senkrechten 2fach 4gliedrigen Strahlen, als auch die den Winkel zwischen zwei nachbarlichen ebenbildlichen 4gliedrigen Strahlen halbirenden, in der auf die fragliche 2fach 4gliedrige Axe senkrechten Ebene liegenden 2fach 2gliedrigen Strahlen als in doppelten Flügelflächen jener Axe liegende 2fach 2gliedrige, auf sie senkrechte, Strahlen betrachten.

39) Ebenso, wie es von den 2fach 3gliedrigen gleichendigen Axen bewiesen wurde, dass sie gerenstellig gleichendig sein mussten, wird auch von den 2fach 5gliedrigen Axen (die stets gleichendige sind) dargethan, dass sie nur gerenstellig gleichendig sein können. Die in den doppelten Flügelflächen der 2fach $p$gliedrigen Strahlen liegenden 1gliedrigen Strahlen sind 2fach 1gliedrige, mithin sind die einer und derselben Art angehörigen einander ebenbildlich gegenbildlich.

Die Anzahl 2fach 1gliedriger Strahlen einer Art ist:

im 2fach 3gliedrig 8strahligen Systeme $= \frac{2 \times 3 \times 8}{2 \times 1}$ $= 24;$

im 2fach 3gliedrig 4strahligen Systeme $= \frac{2 \times 3 \times 4}{2 \times 1}$ $= 12$;

[111] im 1fach 3gliedrig 2×4strahligen Systeme $= \frac{1 \times 3 \times 2 \times 4}{2 \times 1} = 12$;

im 2fach 3gliedrig 20strahligen Systeme $= \frac{2 \times 3 \times 20}{2 \times 1}$ $= 60$.

In den Systemen mit 2fach 3gliedrigen Strahlen lassen sich die 2fach 1gliedrigen Strahlen in 3 Abtheilungen bringen:

a) solche zwischen einem höchstvielgliedrigen (2fach 5-, 4- oder 3gliedrigen) und einem 2fach 3gliedrigen;

b) solche zwischen einem höchstvielgliedrigen Strahle und einem 2fach 2gliedrigen;

c) solche zwischen einem 2fach 3gliedrigen und einem 2fach 2gliedrigen*).

In dem 2×4strahligen Systeme sind solche Abtheilungen der 2fach 1gliedrigen Strahlen nicht vorhanden; die 2fach 1gliedrigen Strahlen liegen hier zwischen zwei 2fach 2gliedrigen.

Bei dem 2fach 3gliedrig 20strahligen sowohl, als auch 8strahligen, so wie auch bei dem 1fach 3gliedrig 2×4 strahligen Systeme sind die vorhandenen 2fach 1gliedrigen Axen gerenstellig gleichendig 2fach 1gliedrig, wie dieses die Beschaffenheit derjenigen höheren 2fach $p$gliedrigen Axen mit sich bringt, in Beziehung zu welchen sie als 2fach 1gliedrige Strebeaxen auftreten, wenn jene vertical stehend gedacht werden. Bei dem 2fach 3gliedrig 4strahligen Systeme aber sind die 2fach 1gliedrigen Axen, welche nicht auf eine der drei 2fach 2gliedrigen Axen senkrecht sind, stets ungleichendig; die sechs gleichwerthigen, auf 2fach 2gliedrige Axen senkrechten, 2fach 1gliedrigen Axen aber sind gleichstellig 2endige 2fach 1gliedrige. Eine solche 2fach 1gliedrige gleichstellig

*) Dass hier in dem Falle, bei welchem ungleichendige 2fach 3gliedrige Axen vorkommen, die 2fach 3gliedrigen Strahlen der einen Art als höchstvielgliedrige betrachtet werden, während die der andern Art so angesehen werden, als seien sie die gewöhnlichen 2fach 3gliedrigen Strahlen hauptaxenloser Strahlensysteme, wird ohne weitere Auseinandersetzung einleuchten.

2endige Axe aber liegt so, dass der Winkel, welchen zwei einander zunächst liegende ungleichwerthige 2fach 3gliedrige Strahlen bilden, durch sie halbirt wird.

Da in dem 2fach 3gliedrig 20strahligen, so wie in dem 2fach 3gliedrig 8strahligen und in dem 1fach 3gliedrig 2 × 4strahligen [**112**] Systeme die 3gliedrigen Axen gerenstellig 2endige sind, so folgt, dass, wenn man eine derselben senkrecht stellt, jede 1gliedrige Axe gleichwie bei hauptaxigen gerenstellig 2endigen 3gliedrigen Gestalten eine gerenstellig 2endige 1fach 1gliedrige sein müsse. Da bei dem 2fach 3gliedrig 4strahligen Systeme die 2gliedrigen Axen gerenstellig 2endige sind, so muss, weil bei hauptaxigen gerenstellig 2endigen 2fach 2gliedrigen Gestalten jede auf die Hauptaxe senkrechte 1fach 1gliedrige Queraxe eine ebenbildlich 2endige ist, auch hier jede auf eine 2gliedrige Axe senkrechte 1fach 1gliedrige Axe eine ebenbildlich 2endige 1fach 1gliedrige sein. Jede andere 1fach 1gliedrige Axe ist aber hier eine ungleichendige, weil der Fall, gemäss welchem dort Axen, welche in einerlei Ebene mit der Hauptaxe und einer 2gliedrigen Queraxe fielen, gleichendige waren, hier dieselben ebenbildlich 2endigen 1fach 1gliedrigen Axen, welche eben erwähnt wurden, betreffen würde. —

Für die 1fach 3gliedrig 20-, 8- und 4strahligen Systeme gilt, weil in ihnen ebenbildlich 2endige 1fach 2gliedrige Axen vorkommen, der Satz: jede 1fach 1gliedrige Axe, die auf einer solchen 1fach 2gliedrigen senkrecht ist, müsse eine ebenbildlich 2endige sein. Dasselbe gilt von den auf ebenbildlich 2endige 1fach 4gliedrige Axen senkrechten 1fach 1gliedrigen Axen im 1fach 3gliedrig 8strahligen Systeme. Alle übrigen 1fach 1gliedrigen Axen sind aber ungleichendig.

2) Betrachtung der einzelnen Systeme.

I. Das *2fach 3gliedrig 8strahlige System*, oder das *8strahlige System* im engern Sinne, hat

1) 3 auf einander senkrechte gleichstellig 2endige *2fach 4gliedrige Axen a*;

2) 4 gerenstellig 2endige *2fach 3gliedrige Axen b*; jeder 2fach 3gliedrige Strahl liegt in der Mitte zwischen 3 nachbarlichen 2fach 4gliedrigen;

3) 6 gleichstellig 2endige *2fach 2gliedrige Axen c*; jeder 2fach 2gliedrige Strahl liegt in der Mitte sowohl

zwischen 2 nachbarlichen 2fach 4gliedrigen, als auch zwischen 2 nachbarlichen 2fach 3gliedrigen Strahlen;

4) *2fach 1gliedrige* gerenstellig 2endige *Axen*, die Anzahl 2fach 1gliedriger Axen einer Art ist stets = 12. Die 2fach 1gliedrigen Axen unterscheiden sich in:

α) 4- *und* 2*ständige* oder kürzer 4*ständige*; jeder Strahl einer solchen 2fach 1gliedrigen Axe liegt in der Ebene zwischen [**113**] einem 2fach 4gliedrigen und einem zu diesem nachbarlichen 2fach 2gliedrigen Strahle. Es sind so viele Arten 4ständiger 2fach 1gliedriger Axen möglich, als der Winkel von 45 Grad, den der 2fach 4gliedrige mit dem ihm nachbarlichen 2fach 2gliedrigen Strahle bildet, Strahlen zu fassen vermag;

β) 3- *und* 2*ständige* oder kürzer 3*ständige;* jeder Strahl einer solchen Axe liegt in der Ebene zwischen einem 2fach 3gliedrigen und einem zu diesem nachbarlichen 2fach 2gliedrigen Strahle. Die Menge von Arten solcher Axen ist gleich der Menge von Strahlen, die ein Winkel von $35^\circ 15' 52''$ (Neigung von *b* gegen *c*) fasst;

γ) 4- und 3*ständige* 2*fach* 1*gliedrige Axen;* jeder 4- und 3ständige 2fach 1gliedrige Strahl liegt in der Ebene zwischen einem 2fach 4gliedrigen und einem zu diesem nachbarlichen 2fach 3gliedrigen Strahle. Die Menge der Arten solcher Axen ist gleich der Menge von Strahlen, die ein Winkel von $54^\circ 44' 8''$ (Neigung von *a* gegen *b*) zu fassen vermag;

5) gerenstellig 2endige 1*fach* 1*gliedrige Axen*, von jeder Art 24. Die Menge der Arten 1fach 1gliedriger Axen ist gleich der Menge von Strahlen, die eine Ecke fasst, in welcher die Kanten folgende Werthe haben: $\frac{360^\circ}{2 \times 2} = 90^\circ$ die eine, $\frac{360^\circ}{2 \times 3} = 60^\circ$ die andere, $\frac{360^\circ}{2 \times 4} = 45^\circ$ die dritte; oder bei welcher die ebenen Winkel der erste $54^\circ 44' 8''$, der zweite 45°, der dritte $35^\circ 15' 52''$ betragen. Da diese 1fach 1gliedrigen Axen gerenstellig 2endig sind, so verhalten sich die beiden, in einer solchen liegenden, Strahlen gegenbildlich, nicht ebenbildlich.

Jeder der 8 ebenbildlich gegenbildlichen 2fach 3gliedrigen Strahlen ist umgeben von 2×3 oder 6 1fach 1gliedrigen Strahlen jeder Art, so dass diese 6 Strahlen auf gleiche Weise nachbarlich zu ihm sich verhalten; die 3 einen ebenbild-

lichen*) verhalten [114] sich zu den 3 andern unter sich ebenbildlichen als gegenbildlich gleichwerthig.

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 24 \\ = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 12 \\ = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 \\ = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \end{array}\right\}$$ = 48 = Anzahl der 1fach 1gliedrigen Strahlen *einer* Art.

- Anzahl der gleichen Enden einer solchen Axe.
- Art der Vielgliedrigkeit derselben.
- Anzahl der Axen einer Art.

II. Das 1*fach* 3*gliedrig* 8*strahlige System* hat:

1) 3 ebenbildlich 2endige 1fach 4gliedrige
2) 4 - 2 - 1 - 3 -
7) 6 - 2 - 1 - 2 -

Axen, welche hinsichtlich auf Lage sich ebenso verhalten, wie die 2fach 4-, 3- und 2gliedrigen Axen des 8strahligen Systems;

4) 1fach 1gliedrige Axen;

α) ebenbildlich 2endige, von jeder Art 12,

$\alpha\alpha$) 4ständige,
$\beta\beta$) 3ständige,
$\gamma\gamma$) 4- und 3ständige,

hinsichtlich auf Lage, Zahl und Menge der Arten mit den ähnlich benannten 2fach 1gliedrigen Axen der 8strahligen Systeme übereinstimmend;

β) ungleichendige; von jeder Art 24, hinsichtlich auf Lage und Menge der Arten mit den 1fach 1gliedrigen Axen des 8strahligen Systems übereinstimmend.

*) Durch Umdrehung des Strahlensystems um jenen 3gliedrigen Strahl, als die Umdrehungsaxe, mit einander vertauschbaren.

$$\left.\begin{array}{rcccccccc} & 3 & \cdot & 2 & \cdot & 1 & \cdot & 4 \\ = & 4 & \cdot & 2 & \cdot & 1 & \cdot & 3 \\ = & 6 & \cdot & 2 & \cdot & 1 & \cdot & 2 \\ = & 12 & \cdot & 2 & \cdot & 1 & \cdot & 1 \\ = & \underbrace{24}_{\text{Anzahl der Axen einer Art.}} & \cdot & \underbrace{1}_{\text{Anzahl der gleichwerthigen Strahlen in einer Axe.}} & \cdot & \underbrace{1 \cdot 1}_{\text{Beschaffenheit der Strahlen einer Art.}} \end{array}\right\} \eqsim 24.$$

Jeder der 8 ebenbildlichen 1fach 3gliedrigen Strahlen ist umgeben von 3 ebenbildlichen 1fach 1gliedrigen Strahlen jeder Art, die sich zu ihm auf gleiche Weise nachbarlich verhalten und durch Umdrehung des Strahlensystems um ihn mit einander vertauscht werden können.

[**115**] III. Das 2*fach* 3*gliedrig* 4*strahlige System* oder das 4*strahlige System* (im engern Sinne) hat:

1) 3 auf einander senkrechte gerenstellig 2endige 2*fach* 2*gliedrige Axen*;

2) 4 ungleichendige 2fach 3gliedrige Axen; jeder 2fach 3gliedrige Strahl der einen Art liegt in der Mitte zwischen 3 solchen der andern Art, während jeder 2fach 3gliedrige Strahl in der Mitte zwischen 3 zu einander nachbarlichen 2fach 2gliedrigen Strahlen liegt;

3) 2fach 1gliedrige Axen,

α) 3- *und* 3*ständige*, d. h. solche, bei denen jeder Strahl in der Ebene zwischen 2 nachbarlichen ungleichwerthigen 2fach 3gliedrigen Strahlen liegt;

αα) gleichstellig 2endige 2fach 1gliedrige Axen. Ihre Anzahl ist 6. Jeder Strahl einer solchen Axe liegt in der Mitte zwischen 2 nachbarlichen ungleichwerthigen 2fach 3gliedrigen Strahlen und zugleich in der Mitte zwischen 2 nachbarlichen 2fach 2gliedrigen;

ββ) ungleichendige 3- und 3ständige Axen. Die Anzahl solcher Axen einer Art ist = 12. Die Menge der Arten ist

gleich der Menge von Strahlen, die der Winkel von 35°15′52″ fasst, welcher die kleinste Neigung einer 2fach 3gliedrigen gegen eine gleichstellig 2endige 2fach 1gliedrige Axe misst;

β) 3- *und* 2*ständige* oder kürzer 3*ständige ungleichendige Axen.* Jeder Strahl einer solchen Axe liegt in der Ebene zwischen einem 2fach 3gliedrigen und einem dazu nachbarlichen 2fach 2gliedrigen Strahle. Je 12 dergleichen Axen sind von einerlei Art; die Menge der Arten ist gleich der Menge von Strahlen, die ein Winkel von 54°44′8″, welcher die Neigung eines 2fach 3gliedrigen zu einem 2fach 2gliedrigen Strahle misst, zu fassen vermag;

4) 1fach 1gliedrige Axen,

α) ebenbildlich 2endige. Jeder Strahl einer solcher Axe liegt in der Ebene zwischen einem 2fach 2gliedrigen und einem dazu nachbarlichen Strahle einer gleichstellig 2endigen 2fach 1gliedrigen Axe, und die Menge der in dem von 2 solchen Strahlen eingeschlossenen Winkel möglichen Strahlen bestimmt die Menge der Arten ebenbildlich gleichendiger 1fach 1gliedriger Axen.

[116] Je 2 × 6 solcher Axen gehören zu einerlei Art; die 6 einen verhalten sich zu den 6 andern gegenbildlich.

β) ungleichendige, von jeder Art 2 × 12 oder 24. Die 12 einen verhalten sich zu den 12 andern gegenbildlich.

Jeder der 4 ebenbildlich gegenbildlichen 2fach 3gliedrigen Strahlen ist umgeben von 2 × 3 oder 6 gleichwerthigen 1fach 1gliedrigen Strahlen, die auf gleiche Weise nachbarlich zu ihm sich verhalten. Die 3 einen unter sich ebenbildlichen verhalten sich gegenbildlich zu den 3 andern.

Die Menge der Arten 1fach 1gliedriger ungleichendiger Axen ist gleich der Menge von Strahlen, die eine Ecke fasst, an welcher die Kanten 90°, 60° und 45° sind.

$$\left.\begin{array}{r} 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2 \\ 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3 \\ 6\cdot 2\cdot 2\cdot 1 \\ 12\cdot 1\cdot 2\cdot 1 \\ \underbrace{24}\cdot\underbrace{1}\cdot\underbrace{1\cdot 1} \end{array}\right\} = 24.$$

IV. Das 1*fach* 3*gliedrig* 4*strahlige System* hat:

1) 3ebenbildlich 2endige 1fach 2gliedrige Axen;

2) 4ungleichendige 1fach 3gliedrige Axen;

3) 1fach 1gliedrige Axen.

Jeder der 4 ebenbildlichen 1fach 3gliedrigen Strahlen einer Art ist umgeben von 3 gleichwerthigen ebenbildlichen 1fach

1gliedrigen Strahlen jeder Art, so dass also 12 ebenbildliche 1fach 1gliedrige Strahlen jeder Art vorhanden sind.

Die 1fach 1gliedrigen Axen zerfallen in:

a) ebenbildlich 2endige, je 6 von einerlei Art. Die Strahlen, aus denen eine solche Axe besteht, liegen in der Ebene zwischen 2 nachbarlichen 2gliedrigen Strahlen. Man unterscheidet

α) die 3- *und* 3*ständigen*, von denen es nur eine Art giebt, bestehend aus Strahlen, deren jeder zwischen 2 ungleichwerthigen 3gliedrigen Strahlen in der Mitte liegt;

β) die gewöhnlichen ebenbildlich 2endigen 1fach 1gliedrigen Axen;

b) ungleichendige 1fach 1gliedrige Axen, je 12 von einerlei Art. Man hat

α) 3- und 3ständige
β) 3- und 2ständige } ungleichendige 1fach 1gliedrige Axen,
γ) gewöhnliche

von denen die ersten aus 1fach 1gliedrigen Strahlen bestehen, [117] welche in der Ebene zwischen 2 ungleichwerthigen 3gliedrigen nachbarlichen Strahlen liegen, während die Strahlen, durch welche eine der 3- und 2ständigen gebildet ist, in der Ebene zwischen einem 3gliedrigen und einem nachbarlichen 2gliedrigen Strahle sich befinden und die gewöhnlichen in keiner solchen Ebene liegen. Die Menge der Arten gewöhnlicher ungleichendiger 1fach 1gliedriger Axen ist 2mal so gross, als die Menge von Strahlen, die eine Ecke fasst, deren Kanten 90°, 60° und 45° sind.

$$\left.\begin{array}{r} 3\cdot2\cdot1\cdot2\\ 4\cdot1\cdot1\cdot3\\ 6\cdot2\cdot1\cdot1\\ 12\cdot1\cdot1\cdot1 \end{array}\right\} = 12.$$

V. Das 1*fach* 3*gliedrig* 2 × 4*strahlige System* oder das 2 × 4*strahlige System* hat:

1) 3 auf einander senkrechte gleichstellig 2endige 2fach 2gliedrige Axen;

2) 4gerenstellig 2endige 1fach 3gliedrige Axen;

3) gerenstellig 2endige 2fach 1gliedrige Axen, von jeder Art 6. Sie liegen so, dass jeder ihrer Strahlen in der Ebene zwischen zwei nachbarlichen 2fach 2gliedrigen Strahlen sich befindet. Man hat:

a) 3- und 3ständige, von denen es nur eine Art giebt.

Jeder Strahl einer solchen Axe liegt zugleich in der Ebene zwischen zwei nachbarlichen gegenbildlichen 3gliedrigen Strahlen;

b) gewöhnliche. Die Menge der Arten ist gleich der doppelten Menge von Strahlen, die ein Winkel von 45° fasst;

4) gerenstellig 2endige 1fach 1gliedrige Axen, von jeder Art 12. Man unterscheidet:

a) 3- und 3ständige
b) 3- und 2ständige } 1fach 1gliedrige Axen.
c) gewöhnliche

Von den erstern liegt jeder Strahl in der Ebene zwischen 2 nachbarlichen gegenbildlichen 1fach 3gliedrigen Strahlen, von den zweiten aber in einer solchen zwischen einem 3gliedrigen und einem 2gliedrigen, von den gewöhnlichen aber in keiner solchen Ebene.

Die Lage der verschiedenen Axen einer Art hängt ab von den bekannten Eigenschaften der 3gliedrigen und der 2gliedrigen Axen, gemäss welchen

[118] 1) jeder 3gliedrige Strahl umgeben ist von 3 einander ebenbildlichen 1fach 1gliedrigen Strahlen, die durch Umdrehung des Strahlensystems um ihn sich mit einander vertauschen lassen;

2) unter gleicher Neigung gegen einen und denselben 2gliedrigen Strahl, in einerlei Ebene mit ihm, ebenbildliche Strahlen liegen.

Die Menge der Arten gewöhnlicher 1fach 1gliedriger Axen ist doppelt so gross, als die Menge von Strahlen, welche eine Ecke fasst, in welcher die Kanten 90°, 60° und 45° sind.

$$\left.\begin{aligned} & 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ = {} & 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \\ = {} & 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \\ = {} & \underbrace{12}_{\text{Menge der Axen einer Art.}} \cdot \underbrace{2}_{\text{Anzahl der gleichwerthigen Strahlen in einer Axe.}} \cdot \underbrace{1}_{\text{Beschaffenheit der Strahlen.}} \cdot 1 \end{aligned}\right\}$$

= 24, Anzahl der gleichwerthigen 1fach 1gliedrigen Strahlen einer Art.

Zur Uebersicht der sämmtlichen 3gliedrig 4axigen Systeme diene folgende Tabelle (S. 129), in welcher die einander entsprechenden Axen der verschiedenen Systeme neben einander gestellt sind.

In dieser Tabelle bedeutet die Abkürzung:

glst.	das	Wort	gleichstellig
grst.	-	-	gerenstellig
ebbdl.	-	-	ebenbildlich
gl.	-	-	gliedrig
end.	-	-	endig
ungl.	-	-	ungleich
f.	-	-	fach
u.	-	-	und.

[**120**] VI. Das 2*fach* 3*gliedrig* 20*strahlige System*, oder das 20*strahlige System* im engern Sinne, hat:

1) 6 gerenstellig 2endige 2fach 5gliedrige Axen. Jeder 2fach 5gliedrige Strahl steht in der Mitte zwischen 5 ihm nachbarlichen ebenbildlichen Strahlen und bildet mit je zwei derselben die Kantenlinien einer 3kantigen Mittelpunktsecke, deren Kanten durch den Mittelpunktswinkel der regelmässigen 5seitigen Figur gemessen werden, also $= \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ sind;

2) 10 gerenstellig 2endige 2fach 3gliedrige Axen. Jeder der 2fach 3gliedrigen Strahlen liegt in der Mitte von 3 gegenseitig nachbarlichen 2fach 5gliedrigen, während umgekehrt jeder 2fach 5gliedrige Strahl in der Mitte von 5 ihm nachbarlichen 2fach 3gliedrigen Strahlen liegt, welche als Kantenlinien einer 5kantigen 5winkligen Mittelpunktsecke angesehen werden können, an der jede Kante $= \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ ist;

3) 15 gleichstellig 2endige 2fach 2gliedrige Axen. Jeder 2fach 2gliedrige Strahl halbirt sowohl a) den Winkel von $63^\circ 26' 5'',82$, den 2 nachbarliche 2fach 5gliedrige Strahlen bilden, als auch b) den, welchen 2 nachbarliche 2fach 3gliedrige einschliessen, dessen Grösse $= 41^\circ 48' 37'',13$ ist;

4) gerenstellig 2endige 2fach 1gliedrige Axen, von jeder Art 30. Man hat:

a) 5- und 2ständige oder kürzer 5ständige. Jeder Strahl einer solchen Axe liegt zwischen einem 5gliedrigen und einem zu diesem nachbarlichen, das heisst unter einem Winkel von $31^\circ 43' 2'',91$ dagegen geneigten, 2gliedrigen Strahle. Die

3 glst. 2 end. 2 f. 4 gl.	3 ebbdl. 2 end. 1 f. 4 gl.	3 grst. 2 end. 2 f. 2 gl.	3 glst. 2 end. 2 f. 2 gl.	3 ebbdl. 2 end. 1 f. 2 gl.
4 grst. 2 end. 2 f. 3 gl.	4 ebbdl. 2 end. 1 f. 3 gl.	4 ungl. end. 2 f. 3 gl.	4 grst. 2 end. 1 f. 3 gl.	4 ungl. end. 1 f. 3 gl.
6 glst. 2 end. 2 f. 2 gl.	6 ebbdl. 2 end. 1 f. 2 gl.	6 glst. 2 end. 2 f. 1 gl.	6 grst. 2 end. 2 f. 1 gl. 3- u. 3 ständige	6 ebbdl. 2 end. 1 f. 1 gl. 3- u. 3 ständige
12 grst. 2 end. 2 f. 1 gl. 4 ständige	12 ebbdl. 2 end. 1 f. 1 gl. 4 ständige	12 ebbdl. 2 end. 1 f. 1 gl.	6 grst. 2 end. 2 f. 1 gl.	6 ebbdl. 2 end. 1 f. 1 gl.
12 grst. 2 end. 2 f. 1 gl. 3 ständige	12 ebbdl. 2 end. 1 f. 1 gl. 3 ständige	12 ungl. end. 2 f. 1 gl. 3- u. 3 ständige	12 grst. 2 end. 1 f. 1 gl. 3- u. 3 ständige	12 ungl. end. 1 f. 1 gl. 3- u. 3 ständige
12 grst. 2 end. 2 f. 1 gl. 4- u. 3 ständige	12 ebbdl. 2 end. 1 f. 1 gl. 4- u. 3 ständige	12 ungl. end. 2 f. 1 gl. 3 ständige	12 grst. 2 end. 1 f. 1 gl. 3- u. 2 ständige	12 ungl. end. 1 f. 1 gl. 3- u. 2 ständige
24 grst. 2 end. 1 f. 1 gl.	24 ungl. end. 1 f. 1 gl.	24 ungl. end. 1 f. 1 gl.	12 grst. 2 end. 1 f. 1 gl.	12 ungl. end. 1 f. 1 gl.

Menge der Arten 5ständiger 2fach 1gliedriger Axen ist gleich der Menge von Strahlen, die der eben erwähnte Winkel zu fassen vermag;

b) 3- und 2ständige oder kürzer 3ständige. Jeder Strahl einer solchen Axe liegt zwischen einem 3gliedrigen und einem zu diesem nachbarlichen, d. h. unter einem Winkel von 20°54′18″, 56 dagegen geneigten 2gliedrigen Strahle. Die Menge der Strahlen, die der angegebene Winkel fasst, ist gleich der möglichen Menge von Arten 3ständiger 2fach 1gliedriger Axen;

c) 5- und 3ständige. Jeder Strahl einer 5- und 3ständigen 2fach 1gliedrigen Axe liegt zwischen den Schenkeln des Winkels von 37°22′38″,52, den ein 5gliedriger mit einem ihm nachbarlichen 3gliedrigen Strahle bildet, und die Menge der [121] Arten 5- und 3ständiger 2fach 1gliedriger Axen ist gleich der Menge von Strahlen, die dieser Winkel zu fassen vermag;

5) gerenstellig 2endige 1fach 1gliedrige Axen, von jeder Art 60. Die Menge von Arten ist gleich der Menge von Strahlen, welche eine Ecke zu fassen vermag, in welcher die Grösse der Kanten $\frac{360^\circ}{2\times 2} = 90^\circ$, $\frac{360^\circ}{2\times 3} = 60^\circ$, $\frac{360^\circ}{2\times 5} = 36^\circ$, der ebenen Winkel aber

37° 22′ 38″, 52
31° 43′ 2″, 91
20° 54′ 18″, 56

beträgt*).

---

*)

$$\left.\begin{array}{r}6\cdot 2\cdot 5\cdot 2\\10\cdot 2\cdot 3\cdot 2\\15\cdot 2\cdot 2\cdot 2\\30\cdot 2\cdot 1\cdot 2\\60\cdot 1\cdot 1\cdot 2\end{array}\right\} = 120$$ (Menge der 1fach 1gliedrigen Strahlen einer Art).

Anzahl der Axen. — Beschaffenheit. — gleichwerthige Strahlen einer Axe.

VII. Bei dem 1*fach* 3*gliedrig* 20*strahligen System* hat man

6	ebenbildlich	2endige	1fach	5gliedrige	Axen,
10	-	2 -	1 -	3 -	- ,
15	-	2 -	1 -	2 -	- ,
30	-	2 -	1 -	1 -	-

von jeder Art, und zwar

a) 5- und 2ständige,
b) 3- und 2ständige,
c) 5- und 3ständige,

60 ungleichendige 1fach 1gliedrige Axen von jeder Art*).

[122] VII. Von den einfachen hauptaxenlosen Gestalten.

Dem unendlich vielstrahligen Systeme entspricht bloss die einzige Gestalt, die wir *Kugel* nennen.

In jedem der übrigen hauptaxenlosen Strahlensysteme sind aber 7 Hauptarten von Strahlen vorhanden; daher auch in jedem hauptaxenlosen Gestaltensysteme 7 Hauptarten von Gestalten möglich sein müssen. Die der Auffassung zunächst liegenden einfachen Gestalten der Art. sind jene, welche entstehen, wenn man in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte des Strahlensystems senkrecht auf alle Strahlen einer bestimmten Art Ebenen legt und diese Ebenen nur so weit verlängert, bis sie sich schneiden und den Raum rings umschliessen**).

---

*)

Anzahl der Axen.	gleichwerthige Strahlen einer Axe.	Beschaffenheit.		
6	2	1	5	
10	2	1	3	
15	2	1	2	= 60.
30	2	1	1	
60	1	1	1	

**) Die Benennung der einzelnen Arten von einfachen hauptaxenlosen Gestalten wird am zweckmässigsten gegründet

1) auf die Anzahl ihrer (wie sich von selbst versteht, gleichwerthigen) Flächen (6flächner, 8flächner, 4flächner, 12flächner, 20flächner), wenn die Flächen derselben regelmässige Vielecke sind;

2) auf die Form der Flächen in Verbindung mit ihrer Anzahl (12-Rautenflächner, 30-Rautenflächner, 12wandiger, 24wandiger und

1) Die 3gliedrig 4axigen Gestalten.

A. Die 8*strahligen Gestalten* (*Octarcta*), homosphäroedrische Gestalten, homotessulare Gestalten.

Fig. 286. 1) Der *Würfel* oder 6*flächner* (*Hexaedrum*, *Hexaeder*, *Cubus*) hat 6 $|\cong|$ Flächen W, die auf den 2fach 4gliedrigen Strahlen senkrecht stehen und 2fach 4gliedrige Flächen, nämlich Quadrate sind. Er hat $\frac{6 \times 4}{2}$ oder 12 $|\cong|$ Kanten r, welche auf 2fach 2gliedrigen Strahlen senkrecht stehen und 2fach 2gliedrige Kanten sind, in denen die Flächenneigung $= 90^\circ$ ist. Die [123] $\frac{4 \times 6}{3}$ oder 8 $|\cong|$ Ecken o desselben sind 3kantige 2fach 3gliedrige Ecken und ihre Scheitel sind die Endpunkte der 2fach 3gliedrigen Strahlen. Sie sind 3fach rechtwinklige, mithin auch 3fach rechtkantige Ecken. Die wichtigsten Schnittebenen des Würfels (Hauptschnitte), d. h. jene, in denen wichtigere Axen dieses Körpers liegen, sind:

a) die 2fach 4gliedrigen oder quadratischen Hauptschnitte des Würfels. Jeder von den 3 solchen Schnitten ist senkrecht auf einer der 3 zu einander senkrechten 2fach 4gliedrigen Axen, liegt daher zwei parallelen Würfelflächen parallel. Die beiden andern 2fach 4gliedrigen Axen liegen in ihm den Seiten des Quadrates parallel, die beiden Diagonalen desselben sind 2fach 2gliedrige Axen des Würfels;

b) die 2fach 2gliedrigen Hauptschnitte. Sie sind rechtwinklige Parallelogramme, deren eines Seitenpaar mit Würfelkanten, das andere mit Würfelflächendiagonalen zusammenfällt. Das Verhältniss der Seiten derselben ist also $= 1 : \sqrt{2}$. Parallel den kürzeren Seiten liegt in jedem dieser Schnitte eine 2fach 4gliedrige, parallel den längeren Seiten eine 2fach

---

60-wandiger Lanzenflächner, 12wandiger Sterzenflächner, 24wandiger, 48wandiger und 120wandiger Dreieckflächner, 24wandiger Viereckflächner, 12wandiger, 24wandiger und 60wandiger Fünfeckflächner);

3) auf das Verbundensein von mehreren zu einer Gruppe von Flächen, so dass dann die Benennung angiebt, wie viele Flächen zu einer Gruppe gehören und wie viele solcher Gruppen vorhanden sind. Dieses betrifft die hauptaxenlosen Gestalten, welche von gleichschenkligen Dreiecken oder Keilflächen begrenzt sind (4×3-wandiger, 6×4wandiger, 8×3wandiger, 12×5wandiger und 20×3wandiger Keilflächner).

2gliedrige Axe, und die beiden Diagonalen sind 2fach 3gliedrige Axen. Die Würfelkante = 1 gesetzt ist also:

die 2fach 4gliedrige Axe $= 1 = 1$
- 2 - 2 - - $= \sqrt{2} = 2\sqrt{\frac{1}{2}}$
- 2 - 3 - - $= \sqrt{3} = 3\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Senkrecht auf jedem 2fach 2gliedrigen Hauptschnitte steht eine der sechs 2fach 2gliedrigen Axen, daher die Anzahl der Hauptschnitte dieser Art = 6 ist;

c) die 2fach 3gliedrigen Hauptschnitte. Sie sind regelmässige Sechsecke; auf jedem solchen Schnitte steht eine der 4 Eckenaxen oder 2fach 3gliedrigen Axen des Würfels senkrecht, daher die Zahl dieser Hauptschnitte = 4 ist. In jedem liegen 3 der 2fach 2gliedrigen Axen als Diagonalen.

2) Der 8*flächner* (*octaedrum*, *Oktaeder*, regelmässiges oder gleichseitiges Oktaeder, 8flach). 8 $|\cong|$ Flächen *o*, die auf den 2fach 3gliedrigen Strahlen senkrecht stehen, 2fach 3gliedrige Flächen, und zwar 3seitige, sind. Seine $\frac{8 \times 3}{2}$ oder 12 Kanten *r* sind $|\cong|$ 2fach 2gliedrige, auf den 2fach 2gliedrigen Strahlen senkrecht stehende Kanten, von denen je 4 in einer der 6 $|\cong|$ [**124**] 4kantigen 2fach 4gliedrigen Ecken *w* sich vereinigen, deren Scheitel die Endpunkte der 2fach 4gliedrigen Strahlen sind. Die Neigung 2er Flächen an einer Kante ergiebt sich aus der Neigung zweier nachbarlichen 3gliedrigen Strahlen als $109^\circ 28' 16''$. Die ebenen Winkel betragen 60°. Fig. 287.

Die Hauptschnitte des 8flächners sind:

a) die 2fach 4gliedrigen, welche Quadrate sind, deren Diagonalen 2fach 4gliedrigen Axen entsprechen, während die auf den Seiten senkrechten Durchmesser derselben 2fach 2gliedrige Axen sind. Ihre Seiten sind Kanten des 8flächners;

b) Die 2fach 2gliedrigen, welche Rauten sind, deren längere Diagonalen 2fach 4gliedrige und deren kürzere Diagonalen 2fach 2gliedrige Axen sind. Jene sind einerlei mit Diagonalen, diese sind gleich den Seiten quadratischer Hauptschnitte, so dass das Verhältniss beider Diagonalen $= \sqrt{2} : 1 = 1 : \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist. Die auf den Seiten der Raute senkrechten Durchmesser derselben sind 2fach 3gliedrige Axen des 8flächners. Die 3gliedrige Axe verhält sich zu der 4gliedrigen, wie die halbe 2gliedrige zur Seite der Raute. Es ist daher, wenn

die 2fach 4gliedrige Axe = 1 ist, auch
- 2 - 2 - - = $\sqrt{\frac{1}{2}}$ und
- 2 - 3 - - = $\sqrt{\frac{1}{3}}$;

c) Die 2fach 3gliedrigen Hauptschnitte, welche auch hier regelmässige Sechsecke sind, in denen 3 der 2fach 2gliedrigen Axen als Diagonalen liegen.

3) Der 12wandige *Rautenflächner* oder der 12-*Rautenflächner* (*dodecaedrum rhombeum*, Rautendodekaeder, dodecaèdre à plans rhombes, Rauten12flach, Granatdodekaeder, Granatoeder, 4kantiges Tetragonal-Dodekaeder u. s. w.) Fig. 134 hat 12 [illegible] *Flächen r*, die auf den 2fach 2gliedrigen Strahlen senkrecht stehen und 2fach 2gliedrige Flächen und zwar 4-seitige d. h. Rauten sind. Die $\frac{4 \times 12}{2}$ oder 24 Kanten sind [illegible] 2fach 1gliedrige gleichseitig ungleichendige Kanten *l*, die auf jenen 2fach 1gliedrigen 4- und 3ständigen Strahlen, von welchen jeder in der Mitte zwischen 2 nachbarlichen 2fach 2gliedrigen Strahlen liegt, senkrecht stehen, so dass sie deshalb 4- und 3ständige Kanten genannt werden können. Die 2 × 12 spitzen ebenen Winkel sind zu je vieren in einer der $\frac{2 \times 12}{4}$ oder 6 (=) 4*kantigen* [125] 2fach 4gliedrigen *Ecken w* vereinigt, während die 2 × 12 stumpfen Winkel zu je dreien in einer der $\frac{2 \times 12}{3}$ oder 8 (=) 3*kantigen* 2fach 3gliedrigen *Ecken o* verbunden sind.

Die Hauptschnitte des 12-Rautenflächners sind:

a) die 2fach 4gliedrigen. Sie sind Quadrate, deren Diagonalen 2fach 4gliedrigen Axen entsprechen. Die den Seiten parallelen Durchmesser sind 2fach 2gliedrige Axen. Die Seiten dieser Hauptschnitte sind grössere Diagonalen der Flächen des Körpers. Das Verhältniss der 2fach 2gliedrigen zu den 2fach 4gliedrigen Axen ist sonach, wie beim 8flächner, = 1 : $\sqrt{2}$;

b) Die 2fach 2gliedrigen Hauptschnitte sind 2fach 2gliedrige 4 und 6seitige Figuren. Die 4 gleichen Seiten entsprechen Kanten des Körpers, die 2 andern, unter sich gleichen stimmen überein mit kürzeren Diagonalen der Flächen desselben. In ihnen liegen zwei 2fach 3gliedrige Axen, eine 2fach 4gliedrige und eine 2fach 2gliedrige. Jene kürzeren Diagonalen stehen senkrecht auf einer 2fach 2gliedrigen Axe

und werden dadurch begrenzt, dass 2 nachbarliche 2fach 3-gliedrige Strahlen sie abschneiden, so dass also das Verhältniss der 2fach 3gliedrigen zur 2fach 2gliedrigen Axe hier eben so ist, wie beim Würfel, d. h. $\sqrt{3} : \sqrt{2}$. Daraus geht hervor, dass, wenn die 2fach 4gliedrige Axe $= 1$ ist, auch die 2fach 2gliedrige $= \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und die 2fach 3gliedrige $= \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$ sein muss;

c) Die 2fach 3gliedrigen Hauptschnitte sind regelmässige Sechsecke, in denen die 2fach 2gliedrigen Axen als Durchmesser liegen, welche senkrecht auf die Seiten sind.

4) Der 6×4*wandige Keilflächner*, 6×4flächner (*Hexacistetraedrum isosceloideum*, Pyramidenwürfel, Hexakistetraeder, Tetrakishexaeder, Hexatetraeder, Würfel, der auf jeder seiner Flächen eine niedrige 4seitige Pyramide trägt, Würfel mit 4seitig trichterförmigen Vertiefungen auf seinen Flächen, hexaedrisches Trigonal-Ikositetraeder, hexaedrisch pyramidales Ikositessaraeder u. s. w.) hat 24 $|\cong|$ Flächen v, Fig. 289.
die, falls die einfache Gestalt eine endlich begrenzte ist, worauf es hier zunächst ankommt, auf 2fach 1gliedrigen 4- und 2-ständigen Strahlen senkrecht stehen, mithin 2fach 1gliedrige Flächen und zwar 2- und 1seitige d. h. gleichschenklige Dreiecke oder Keilflächen sind. Je 4 solche Flächen liegen also dem Ende eines 2fach 4gliedrigen Strahles zunächst. 12 Kanten dieses Körpers sind 3- und 3ständige $|\cong|$ 2fach 2gliedrige [**126**] Kanten r, die auf 2fach 2gliedrigen Strahlen senkrecht stehen. Die 24 übrigen Kanten l sind 4- und 3-ständige $|\cong|$ 2fach 1gliedrige gleichseitige ungleichendige Kanten. Ihr eines Ende trifft in eine der 6 $|\cong|$ 4kantigen 2fach 4gliedrigen Ecken w der Gestalt, während ihr anderes in einer der 8 $|\cong|$ 2×3kantigen 2fach 3gliedrigen Ecken o liegt. Das Verhältniss der 3gliedrigen zur 2gliedrigen Axe ist wie im Würfel; die 4gliedrige Axe aber ist veränderlich, und von dieser Veränderlichkeit hängt die verschiedene Beschaffenheit der 6×4wandigen Keilflächner ab.

5) Der 8×3*wandige Keilflächner* oder 8×3flächner (*Octacistriedrum isosceloideum*, Triakisoktaeder, Pyramidenoktaeder, oktaedrisches Trigonal-Ikositetraeder, oktaedrisch pyramidales Ikositessaraeder, Pyramiden8flach, Oktaeder, das auf jeder Fläche eine 3seitige Pyramide trägt*), u. s. w.)

*) Auch solche Gestalten, welche statt der Pyramide eine

Fig. 290. hat 24 $|\cong|$ Flächen *d*, die auf 2fach 1gliedrigen 3- und 2ständigen Strahlen senkrecht stehen und Keilflächen oder gleichschenklige Dreiecke sind. Je 3 dieser Flächen liegen dem Ende eines 2fach 3gliedrigen Strahles zunächst. 12 Kanten des Körpers sind 4- und 4ständige $|\cong|$ 2fach 2gliedrige Kanten *r*, die 24 übrigen Kanten *l* sind 4- und 3ständige $|\cong|$ 2fach 1gliedrig gleichseitig ungleichendige; das eine Ende jeder solchen Kante trifft in eine der 6 $|\cong|$ 2 $\times$ 4kantigen 2fach 4gliedrigen Ecken *w*, das andere in eine der 8 $|\cong|$ 3-kantigen 2fach 3gliedrigen Ecken *o*. Das Verhältniss der 4gliedrigen Axe zur 2gliedrigen ist wie im 8flächner, aber die 3gliedrigen Axen sind veränderlich, und hierdurch werden die möglichen Arten der 8 $\times$ 3flächner bedingt.

6) Der 24*wandige Lanzenflächner* (*Icositetraedrum doroideum*, Leucitoeder, Leucitoide, Leucit, Trapezoeder, 2kantiges Tetragonal-Ikositetraeder, trapezoidales Ikositessarae-
Fig. 291. der) hat 24 $|\cong|$ Flächen *l*, die auf 2fach 1gliedrige 4- und 3ständige Strahlen senkrecht und lanzenförmige Vierecke sind. Die 24 $|\cong|$ 4- und 2ständigen 2fach 1gliedrigen Kanten *v* sowohl als die 24 $|\cong|$ 3- und 2ständigen *d* sind 2fach 1-gliedrig gleichseitig ungleichendige Kanten. In jeder der 6 $|\cong|$ 4kantigen 2fach 4gliedrigen Ecken *w* treffen vier der 4- und 2ständigen [127] Kanten zusammen. In jeder der 8 $|\cong|$ 3kantigen 2fach 3gliedrigen Ecken *o* sind vereinigt drei der 3- und 2ständigen Kanten. In jeder der 12 $|\cong|$ 2 $\times$ 2kantigen 2fach 2gliedrigen Ecken *r* sind verbunden 2 Kanten der einen und 2 Kanten der andern Art. In den verschiedenen 24wandigen Lanzenflächnern ist das Verhältniss des 2gliedrigen Strahls zu dem 2fach 1gliedrigen Strahle, der zwischen zweien nachbarlichen 2gliedrigen in der Mitte liegt, unveränderlich $= 2 : \sqrt{3}$, aber das Verhältniss der 4gliedrigen Axe zu der 3gliedrigen ist veränderlich und bedingt die verschiedenen Arten.

7) Der 48*wandige Dreieckflächner*, 48*flächner* (*Tetracontaoctaedrum trigonoideum*, Hexakisoktaeder oder 6 $\times$ 8-flächner, Pyramiden-Granatoeder, Tetrakontaoktaeder, Trigonalpolyeder, Pyramidenrauten12flach, 2 $\times$ 24 flach) hat

---

3flächige trichterartige Vertiefung tragen (wie sie z. B. manche unvollkommen ausgebildete Krystalle von Eisenkies zeigen), können die Form von 8 $\times$ 3wandigen Keilflächnern haben.

2 $\times$ 24 Flächen *e*, die 24 einen $\cong$ zu einander, aber $|=|$ zu den 24 andern, die unter sich $\cong$ sind. Sie sind 1fach 1gliedrige Flächen und zwar unregelmässige Dreiecke. Es befinden sich an ihnen dreierlei Arten von Kanten, von jeder Art 24. Jede Kante ist 2fach 1gliedrig gleichseitig ungleichendig, die einen *l* sind 4- und 3ständig, die andern *v* 4- und 2ständig, die dritten *d* 3- und 2ständig. In jeder der 6 $|\cong|$ 2mal 4kantigen 2fach 4gliedrigen Ecken *w* sind vereinigt 4 der 4- und 3ständigen und 4 der 4- und 2ständigen Kanten. In jeder der 8 $|\cong|$ 2mal 3kantigen 2fach 3gliedrigen Ecken *o* treffen 3 der 4- und 3ständigen und 3 der 3- und 2ständigen Kanten zusammen. In jeder der 12 $|\cong|$ 2mal 2kantigen 2fach 2gliedrigen Ecken *r* aber sind 2 der 4- und 2ständigen mit 2 der 3- und 2ständigen Kanten verbunden. Fig. 292.

B. *Die* 1*fach* 3*gliedrig* 8*strahligen Gestalten.*

Die Gestalten dieses Systems sind, den 48wandigen Dreieckflächner ausgenommen, welcher hier nicht als einfache Gestalt auftritt, sondern als Verbindung zweier 24wandiger Fünfeckflächner betrachtet werden muss, dieselben, wie in dem 8strahligen Gestaltensysteme, nämlich der Würfel, der 8flächner, der 12-Rautenflächner, der 6 $\times$ 4flächner, der 8 $\times$ 3-flächner und der 24wandige Lanzenflächner. Aber diejenigen Theile dieser Gestalten, welche 2fach 4-, 3-, 2- oder 1gliedrig waren, haben hier bloss die Bedeutung von 1*fach* 4-, 3-, 2- oder 1gliedrigen solchen Theilen erhalten, welche Bedeutung sich ausspricht, wenn die Flächen von einer oder mehreren derselben in Verbindung treten mit einem 24wandigen Fünfeckflächner, der hier diejenige Gestalt ist, welche nicht nur dem gegebenen Strahlensysteme entspricht, [**128**] sondern welche auch den Charakter des fraglichen Strahlensystems selbst ausdrückt.

Der 24*wandige Fünfeckflächner* (*Icositetraedrum pentagonoideum*, Pentagon-Ikositetraeder) hat 24 $\cong$ 1fach 1gliedrige Flächen *e*, im Allgemeinen Fünfecke, in denen die Seiten von dreierlei Länge sind, 2 sich schneidende der einen, 2 andere sich gleichfalls schneidende der andern und die 5te Seite der 3ten Art entsprechend. Die 24 $\cong$ 4ständigen Kanten *v* sowohl als die 24 $\cong$ 3ständigen *d* sind 1fach 1gliedrige Kanten; die 12 übrigen Kanten *r* sind 1fach 2gliedrige. In jeder der 6 $\cong$ 4kantigen 1fach 4gliedrigen Ecken *w* sind 4 Kanten der ersten Art, in jeder der 8 $\cong$ 3kantigen 1fach 3gliedrigen Ecken *o* sind 3 Kanten der 2ten Art und in jeder Fig. 293 a., b.

der 24 $\cong$ 3 $\times$ 1kantigen 1fach 1gliedrigen **Ecken** *i* sind Kanten aller 3 Arten vereinigt. Der 24wandige Fünfeckflächner ist seinem Gegenbilde nicht ebenbildlich. Werden von den Wänden des 48wandigen Dreieckflächners im 2fach 3gliedrigen 8strahligen Systeme die 24 einen unter sich $\cong$ so weit verlängert, bis sie sich schneiden und einen Körper für sich allein ringsum begrenzen, so entsteht ein 24wandiger Fünfeckflächner, der zu dem, welcher durch Verlängerung der 24 andern unter sich ebenbildlichen Wände entsteht, sich gegenbildlich verhält. Wenn *a* ein rechter 24wandiger Fünfeckflächner genannt wird, so ist *b* ein linker.

C. *Die* 2 $\times$ 4*strahligen Gestalten* (*Ditetrarcta*).

Von den Gestalten des 8strahligen Systems kommen hier als einfache Gestalten vor der Würfel, der 8flächner, der 12-Rautenflächner, der 8 $\times$ 3wandige Keilflächner, der 24-Lanzenflächner. Diejenigen ihrer Theile aber, welche 2fach 4gliedrig waren, haben hier die Bedeutung 2fach 2gliedriger; diejenigen, welche 2fach 3gliedrig waren, sind 1fach 3gliedrig geworden, und diejenigen, welche 2fach 2gliedrig waren, sind hier 2fach 1gliedrig. Diejenigen 2fach 1gliedrigen Theile, welche 4- und 3ständig oder 2- und 3ständig waren, sind 1fach 1gliedrig geworden, und nur jene, welche 4- und 2ständig waren, sind 2fach 1gliedrig geblieben. Als eigenthümliche Gestalten aber treten auf statt der 6 $\times$ 4wandigen Keilflächner die 12-Sterzenflächner und statt der 48wandigen Dreieckflächner die 24wandigen Viereckflächner.

Der 12-*Sterzenflächner* (*Dodecaedrum uroideum*, Pentagon-Dodekaeder, hexaedrisches Pentagon-Dodekaeder, dachförmiges [**129**] Dodekaeder, Kieszwölfflach, Pyritoeder) hat
Fig. 294 *a.*, *b.* 12 $|\cong|$ Flächen *v*, welche 2fach 1gliedrige Figuren und zwar Sterzenflächen sind, bei denen das eine Paar gleichwerthiger Seiten dem andern Paare gleichwerthiger Seiten an Länge gleich ist. Die Kanten sind von zweierlei Art. Die 6 einen *w* sind $|\cong|$ 2fach 2gliedrige, die 24 andern *d* sind 1fach 1-gliedrige Kanten. Die 12 einen, die unter sich $\cong$ sind, verhalten sich zu den 12 andern gegenbildlich. Er hat ferner 12 $|\cong|$ 2fach 1gliedrige 2- und 1kantige Ecken φ und 8 dergleichen *o*, welche 1fach 3gliedrige 3kantige sind. Die 4 einen von diesen 8 Ecken, welche $\cong$ sind, verhalten sich zu den 4 andern $|=|$. Denkt man sich einen 6 $\times$ 4wandigen Keilflächner als eine 2 $\times$ 4strahlige Gestalt und verlängert 12 dieser Voraussetzung gemäss als gleichwerthig zu

betrachtende Flächen desselben so weit, bis sie einen Körper für sich allein begrenzen, so entsteht ein 12-Sterzenflächner, der von dem, welcher durch die Verlängerung der 12 andern Flächen hervorgeht, sich bloss durch die Stellung unterscheidet. Man hat daher 12-Sterzenflächner der ersten *a* und solche der 2ten Stellung *b*.

Der 24 *wandige Viereckflächner* (*Icositetraedrum tetragonoideum*, Dyakisdodekaeder, gebrochenes Pentagon-Dodekaeder, 3kantiges Tetragonal-Ikositetraeder, heterogonales Ikositessaraeder, Kies24flach) hat 24 Flächen *e*, welche 1fach 1gliedrige 4ecke mit Seiten von 3erlei Länge sind, in denen 2 gleiche Seiten als Schenkel für einen Winkel dienen. 12 dieser Flächen sind unter sich $\cong$ und verhalten sich zu den 12 andern $|=|$. 12 Kanten einer Art *v* und eben so viel einer 2ten Art *f* sind $|\cong|$ 2fach 1gliedrige gleichseitig ungleichendige Kanten. Beide Arten von Kanten unterscheiden sich an Grösse und Länge. Die 24 übrigen Kanten *d* sind 1fach 1gliedrig. Die 12 einen sind unter sich $\cong$ und verhalten sich zu den 12 andern $|=|$. Die Ecken sind dreierlei; 6 derselben sind $|\cong|$ 2fach 2gliedrige 2 $\times$ 2kantige *w*, 8 andere sind 1fach 3gliedrige 3kantige *o*. Von diesen verhalten sich die 4 einen, die unter sich $\cong$ sind, zu den 4 andern als $|=|$. Die 12 Ecken φ der 3ten Art sind $|\cong|$ 2fach 1gliedrige 2- und 2 $\times$ 1kantige. Denkt man sich einen 48-flächner als eine 2 $\times$ 4strahlige Gestalt und verlängert 24 von seinen Flächen, die dieser Annahme gemäss als gleichwerthig betrachtet werden müssen, so weit, bis sie einen Körper allein begrenzen, so ist dieser ein 24wandiger 4eckflächner, welcher
[130] von dem, der durch die Verlängerung der 24 andern Flächen entsteht, nur durch die Stellung verschieden ist, so dass beide als 24wandige 4eckflächner 1ster und 2ter Stellung betrachtet werden können. *a* stellt einen solchen der 1sten, *b* einen der 2ten Stellung dar. Fig. 295 *a*, *b*.

D. *Die* 4*strahligen Gestalten*, *Tetrarcta*.

1) Auch hier kommt der Würfel als einfache Gestalt vor, aber seine Flächen, so wie auch die auf ihnen senkrechten Strahlen haben die Bedeutung der 2fach 2gliedrigen erhalten. Seine Flächen sind hier nur rechtwinklige Rauten. Von seinen Ecken sind nur je 4 solche gleichwerthig, die durch Flächendiagonalen verbunden werden können. Je 2, den Enden einer Eckenaxe entsprechende, Ecken sind ungleichwerthig. Seine

12 Kanten sind $|\cong|$ 2fach 1gliedrige gleichseitig ungleichendige Kanten geworden.

2) Der *Vierflächner* (*Tetraedrum*, 1fache 3seitige Pyramide, reguläres Tetraeder, Tetraeder) hat 4 $|\cong|$ 2fach 3-
Fig. 296 a., b. gliedrige Flächen *o*, welche regelmässige 3seitige Figuren sind; 6 $|\cong|$ 2fach 2gliedrige Kanten *w*, 4 $|\cong|$ 2fach 3gliedrige 3kantige Ecken Ø. Neigung der Flächen $= 70^{\circ}\,31'\,44''$.

Die Flächen dieses Körpers sind entweder senkrecht auf den 2fach 3gliedrigen Strahlen der ersten oder auf denen der 2ten Art; daher unterscheidet man einen 4flächner der ersten und einen solchen der 2ten Stellung; beide verhalten sich zu einander $|\cong|$, wenn sie von gleicher Grösse sind, sind aber darum in Beziehung zu dem 4strahligen Axensysteme nicht als gleichwerthig zu betrachten. Denkt man sich, es hätten die 2fach 3gliedrigen Axen des 8flächners die Bedeutung der 4 ungleichendigen 2fach 3gliedrigen Axen im 4strahligen Systeme und zerlegt man sonach jede solche Axe in 2 ungleichwerthige entgegengesetzte 2fach 3gliedrige Strahlen und verlängert diejenigen 4 Flächen des Körpers, welche den 4 gleichwerthigen Strahlen der einen Art entsprechen, so weit, bis durch sie allein ein Raum ringsum begrenzt ist, so entsteht ein 4flächner der ersten Stellung a, während durch eben solche Verlängerung der 4 andern Flächen ein 4flächner der 2ten Stellung *b* hervorgeht.

3] Der 12-*Rautenflächner*. Er verhält sich im 4strahligen Systeme bloss als eine besondere Art der folgenden Gestalten.

4) Der 12*wandige Lanzenflächner* oder der 12-*Lanzenflächner* (*Dodecaedrum doroideum*, Trapezdodekaeder, Trapezoid-Dodekaeder, [131] trapezoidales Dodekaeder, 2kantiges
Fig. 297 Tetragonal-Dodekaeder) hat 12 $|\cong|$ 2fach 1gliedrige und
a., b. zwar lanzenförmige Flächen *l*, welche auf 3- und 3ständige Strahlen senkrecht sind; 2 Arten von Kanten *v* und *k*, von jeder Art 12. Jede Kante ist 2fach 1gliedrig gleichseitig ungleichendig. Die von einerlei Art sind $|\cong|$. Sie sind unterschieden von einander an Länge und Neigung der sie bildenden Flächen. Er hat ferner 4 $|\cong|$ 3kantige 2fach 3gliedrige Ecken der ersten Art *o* und eben so viel der 2ten Art Ø; in den einen sind bloss Kanten der ersten, in den andern Kanten der 2ten Art vereinigt; 6 $|\cong|$ 2×2kantige 2fach 2gliedrige Ecken *w*, in jeder sind 2 Kanten der einen und 2 Kanten der andern Art verbunden. Man unterscheidet die 12-Lanzen-

flächner der ersten und die der 2ten Stellung *a* und *b*. Die Kanten der ersten Art des einen haben gleiche Beschaffenheit mit denen der 2ten Art des andern; dasselbe gilt von den 3kantigen Ecken. Als Gestalten an sich betrachtet sind beide, wenn sie gleich sind, auch $|\cong|$, und nur die Stellung in Beziehung zum Strahlensysteme bedingt den Unterschied.

Zwischen den 12-Lanzenflächnern der ersten und denen der 2ten Stellung in der Mitte stehend ist derjenige 12-Lanzenflächner, bei welchem die Kanten beider Arten an Länge und Grösse einander gleich sind und nur an Werth in Beziehung zum Strahlensysteme sich unterscheiden, nämlich der 12-Rautenflächner.

Wenn ein 8 $\times$ 3wandiger Keilflächner als eine 4strahlige Gestalt betrachtet wird und die 12 einen seiner Flächen, welche dieser Annahme gemäss gleichwerthig sind, so weit verlängert werden, bis sie einen Körper für sich allein begrenzen, so ist dieser Körper ein 12wandiger Lanzenflächner der einen Stellung, während der durch die Verlängerung der 12 andern entstehende Körper ein 12-Lanzenflächner der andern Stellung ist.

5) Der 4 $\times$ 3*wandige Keilflächner* oder 4 $\times$ 3-*Keilflächner* (*Tetracistriedrum isosceloideum*, Pyramiden-Tetraeder, Viermaldreiflächner, Trigondodekaeder, Trigonal-Dodekaeder, pyramidales Dodekaeder) hat 12 $|\cong|$ 2fach 1gliedrige 2- und 1seitige Flächen, d. h. Keilflächen *d*, 6 $|\cong|$ 2fach 2gliedrige Kanten *w* und 12 $|\cong|$ 2fach 1gliedrige 3- und 3ständige Kanten *l*, 4 $|\cong|$ 3kantige 2fach 3gliedrige Ecken *o* und 4 $|\cong|$ 2mal 3kantige 2fach 3gliedrige Ecken *O*. Werden am 24-Lanzenflächner 12 sich in Beziehung auf ein in ihm gedachtes 4strahliges Axensystem [**132**] als gleichwerthig verhaltende Flächen desselben verlängert, bis zum Verschwinden der 12 übrigen, so entsteht ein 4 $\times$ 3wandiger Keilflächner der einen Stellung *a*, während ebenso die 12 andern Flächen jenes Körpers einen 4 $\times$ 3wandigen Keilflächner der 2ten Stellung *b* bilden. Fig. 298 *a.*, *b.*

6) Der 6 $\times$ 4*wandige Keilflächner* hat hier bloss die Bedeutung der folgenden Art.

7) Der 24*wandige Dreieckflächner* oder 24-*Dreieckflächner* (*Icositetraedrum trigonoideum*, Hexakistetraeder, gebrochenes Pyramiden-Tetraeder, tetraedrisches Trigonal-Ikositetraeder, skalenisches Ikositessaraeder) hat 24 Flächen *e*, von denen die 12 einen, die unter sich $\cong$ sind, zu den Fig. 299 *a.*, *b.*

12 andern sich $|=|$ verhalten. Sie sind 1fach 1gliedrige Dreiecke. An ihm sind ferner dreierlei Arten von Kanten, von jeder Art 12; die von einerlei Art $|\cong|$ 2fach 1gliedrig gleichseitig ungleichendig. Die einen sind 3- und 3ständige *l*, die beiden andern *v* und *k* aber sind 3- und 2ständig und unterscheiden sich im Allgemeinen durch Lage, Länge und Grösse. Er hat 4 $|\cong|$ 2 $\times$ 3kantige 2fach 3gliedrige Ecken der ersten Art *o*, in deren jeder 3 der 3- und 3ständigen Kanten mit 3 der 3- und 2ständigen der ersten Art verbunden sind; 4 eben solche Ecken einer 2ten Art *O*, in jeder sind 3 der 3- und 3ständigen Kanten mit 3 der 3- und 2ständigen Kanten der andern Art verbunden; 6 $|\cong|$ 2 $\times$ 2kantige 2fach 2gliedrige Ecken *w*, deren jede 2 der 3- und 2ständigen Kanten erster und 2 dergleichen der 2ten Art enthält.

Wird der 48wandige Dreieckflächner als eine 4strahlige Gestalt betrachtet und werden die 24 einen Flächen desselben, welche dieser Voraussetzung nach gleichwerthig sind, verlängert, so dass sie den Raum allein umschliessen, so bilden sie einen 24wandigen Dreieckflächner der ersten Stellung *a*, während auf ähnliche Weise die 24 andern Flächen jenes Körpers einen 24wandigen Dreieckflächner der 2ten Stellung *b* begrenzen. Denkt man sich einen 24wandigen Dreieckflächner in der Art sich verändernd, dass nach und nach die beiden Arten von 2 $\times$ 3kantigen Ecken desselben einander gleich werden, so wird er zu einem 6 $\times$ 4*wandigen Keilflächner*. Schreitet diese Veränderung noch weiter fort, so erreicht er die Eigenschaft eines 24wandigen Dreieckflächners der 2ten Stellung, wenn er vorher ein solcher der ersten war.

[**133**] E. *Die 1fach 3gliedrig 4strahligen Gestalten.*

Sämmtliche Gestalten des 2fach 3gliedrig 4strahligen Systems, mit Ausnahme des 24wandigen Dreieckflächners und des 6 $\times$ 4wandigen Keilflächners, lassen sich auch als einfache Gestalten in Beziehung auf ein 1fach 3gliedrig 4strahliges Axensystem denken. Diejenigen Theile aber, welche 2fach 3-, 2- oder 1gliedrig waren, haben hier bloss die Bedeutung von 1fach 3-, 2- oder 1gliedrigen erhalten. So also treten auch hier auf: der Würfel, der 4flächner, der 12-Rautenflächner, die 12-Lanzenflächner, die 4 $\times$ 3wandigen Keilflächner.

Der 24wandige Dreieckflächner aber, wenn er als eine 1fach 3gliedrige 4strahlige Gestalt betrachtet werden soll, ist

eine zusammengesetzte Gestalt; denn werden dem 1fach 3-gliedrig 4strahligen Axensysteme gemäss 12 ebenbildliche Flächen desselben so weit verlängert, dass sie den Raum allein umschliessen, so entsteht ein

12*wandiger Fünfeckflächner*, 12-*Fünfeckflächner* (*Dodecaedrum pentagonoideum*, tetraedrisches Pentagonal-Dodekaeder), der zu dem, welcher durch Verlängerung der 12 andern Flächen des Körpers entsteht, sich |=| verhält. Die 12 Flächen *e* eines solchen Körpers sind ≅ 1fach 1gliedrige Fünfecke. Jede hat 2 Seiten von einer, 2 von einer andern und eine von einer 3ten Länge; 6 Kanten *w* des Körpers sind ≅ 1fach 2gliedrig; die 24 übrigen Kanten sind 1fach 1gliedrig und von zweierlei Art. Beide Arten *d* und *δ* sind verschieden an Länge, Grösse und Lage. Der Körper hat 4 ≅ 3kantige 1fach 3gliedrige Ecken der einen Art *o*, ebensoviel einer 2ten Art *O* und ausserdem 12 ≅ 3 × 1kantige 1fach 1gliedrige Ecken *i*. Aus dem 48wandigen Dreieckflächner lassen sich durch Verlängerung von je 12 zusammengehörigen Flächen desselben 4 solche 12wandige Fünfeckflächner erzeugen. Zwei davon sind ≅, aber zu den übrigen |=|. Die 2 einen *a* und *c* oder *b* und *d*, welche einander ≅ sind, sind nur an Stellung verschieden. Gleichwie aus dem 24wandigen Dreieckflächner 2 ≅ 12wandige Fünfeckflächner gebildet wurden, so entstehen auf ähnliche Weise aus einem 6 × 4wandigen Keilflächner zwei 12*wandige Sterzenflächner*, bei denen, wenn sie als 1fach 3gliedrig 4strahlige Gestalten auftreten, die 2fach 2gliedrigen Kanten als 1fach 2gliedrige, die 2fach 1gliedrigen Flächen als 1fach 1gliedrige, die sich |=| verhaltenden 3kantigen Ecken als verschiedenwerthige [**134**] und die 2fach 1gliedrigen Ecken als blosse 1fach 1gliedrige zu betrachten sind. Fig. 300 a., b., c., d.

2) Die 3gliedrig 10axigen Gestalten.

A. *Die* 20*strahligen Gestalten, Icosiarcta.*

1) Der *Zwölfflächner* (*Dodecaedrum*, regelmässiges Pentagondodekaeder). Ihn begrenzen 12 |≅| 2fach 5gliedrige 5seitige Flächen *d*, d. h. regelmässige Fünfecke; er hat 30 |≅| 2fach 2gliedrige Kanten *r*; 20 |≅| 3kantige 2fach 3gliedrige Ecken *i*. Grösse der Kanten 116°33′54″. Fig. 301.

2) Der *Zwanzigflächner* (*Icosaedrum*) hat 20 |≅| 2fach 3gliedrige 3seitige Flächen *i*; 30 |≅| 2fach 2gliedrige Kanten *r*; Fig. 302.

12 |≅| 5kantige 2fach 5gliedrige Ecken *d*. Grösse der Kanten 138° 11′ 22″, 8.

Fig. 303. 3) Der 30-*Rautenflächner* (*Triacontaedrum rhombeum*, regelmässiges Triakontaeder) hat 30 |≅| 2fach 2gliedrige und zwar rautenförmige Flächen *r* mit ebenen Winkeln von 116° 33′ 54″; 60 |≅| 2fach 1gliedrige gleichseitige ungleichendige Kanten *l*; 12 |≅| 5kantige 2fach 5gliedrige Ecken *r* und 20 |≅| 3kantige 2fach 3gliedrige Ecken *i*. Grösse der Kanten 144°.

Fig. 304. 4) Der 12 × 5*wandige Keilflächner* (*Dodecacispentaedrum*, Pyramidendodekaeder (zum Theil)) hat 60 |≅| 2fach 1gliedrige Keilflächen *f*; 30 |≅| 2fach 2gliedrige Kanten *r* von der Lage der Kanten des 12flächners; 60 |≅| 2fach 1gliedrige gleichseitig ungleichendige Kanten *l*, welche 5- und 3ständige Kanten sind; 12 |≅| 5kantige 2fach 5gliedrige Ecken *d* und 20 |≅| 2fach 3gliedrige 2 × 3kantige Ecken *i*.

Fig. 305. 5) Der 20 × 3*wandige Keilflächner* (*Icosacistriedrum isosceloideum*, Pyramiden-Ikosaeder) hat 60 |≅| 2fach 1gliedrige Keilflächen *z*; 30 |≅| 2fach 2gliedrige Kanten *r*, an Lage mit denen des 20flächners übereinstimmend; 60 |≅| 2fach 1gliedrige gleichseitig ungleichendige 3- und 5ständige Kanten *l*; 12 |≅| 2fach 5gliedrige 2 × 5kantige Ecken *d* und 20 |≅| 2fach 3gliedrige 3kantige Ecken *i*.

Fig. 306. 6) Der 60-*Lanzenflächner* (*Hexecontaedrum doroideum*) hat 60 |≅| 2fach 1gliedrige lanzenförmige Flächen *l*; 60 |≅| 2fach 1gliedrige 5- und 2ständige Kanten *f* und ebensoviel solche 3- und 2ständige Kanten *z*; 12 |≅| 2fach 5gliedrige 5kantige Ecken *d*, 20 |≅| 2fach [135] 3gliedrige 3kantige Ecken *i* und 30 |≅| 2fach 2gliedrige 2 × 2kantige Ecken *r*.

Fig. 307. 7) Der 120*wandige Dreieckflächner* (*Hecatonicosaedrum trigonoideum*) hat 120 Flächen *e*, welche 1fach 1gliedrige Dreiecke sind. Die 60 einen unter sich ≅ verhalten sich zu den 60 andern unter sich ≅ als deren Gegenbilder. Die Kanten sind von 3erlei Art, alle aber sind 2fach 1gliedrige gleichseitig ungleichendige Kanten und die 60 einer jeden Art angehörigen einander |≅|. Die einen *l* sind 5- und 3ständig, die andern *f* 5- und 2ständig und die dritten *z* sind 3- und 2ständig. 12 Ecken *d* desselben sind |≅| 2fach 5gliedrig 2 × 5kantig, 20 andere Ecken *i* sind |≅| 2fach 3gliedrig 2 × 3kantig; die 30 übrigen Ecken *r* aber sind |≅| 2fach 2gliedrig 2 × 2kantig.

B. 1*fach* 3*gliedrig* 20*strahlige Gestalten.*

Der 12flächner, der 20flächner, der 30-Rautenflächner, der 12 × 5wandige Keilflächner, der 20 × 3wandige Keilflächner

und der 60-Lanzenflächner sind auch als 1fach 3gliedrig 20strahlige Gestalten zu betrachten; aber diejenigen ihrer Theile, welche 2fach 5-, 3-, 2- oder 1gliedrig waren, sind hier bloss 1fach 5-, 3-, 2- oder 1gliedrig. Eine eigenthümliche Gestaltenart aber in dem 1fach 3gliedrig 20strahligen Systeme entsteht, wenn man den 120wandigen Dreieckflächner als eine dem fraglichen Strahlensysteme entsprechende Gestalt betrachtet und 60 ≅ Flächen desselben so weit verlängert, bis sie einen Körper allein umschliessen, dessen Gegenbild durch die Verlängerung der 60 andern unter sich ≅ Flächen des 120wandigen Dreieckflächners entstehen würde. Jede der beiden so entstehenden Gestalten ist ein

60wandiger 5eckflächner (Hexecontaedrum pentagonoideum). Dieser hat 60 ≅ 1fach 1gliedrige 5eckige Flächen *e*, jede mit 2 Seiten einer, 2 Seiten einer andern und 1 Seite von dritter Länge, je 2 gleich lange Seiten einen der Winkel einschliessend. Die Kanten sind von dreierlei Art. Die 60 einen *r* sind 5ständige 1fach 1gliedrige, die 60 andern *ð* sind 3ständige 1fach 1gliedrige, die übrigen 30 Kanten *r* sind 1fach 2gliedrige; die 12 Ecken *d* sind 1fach 5gliedrige 5kantige, die 20 Ecken *i* sind 1fach 3gliedrige 3kantige und die 60 Ecken *y* sind 1fach 1gliedrige 3 × 1kantige. Die Theile einer Art sind alle einander ebenbildlich gleich. Fig. 390.

Eben so wie es zwei einander gleiche und ähnliche sich gegenbildlich verhaltende 24wandige Fünfeckflächner gab, einen [136] rechten und einen linken, hat man auch zwei solche 60wandige Fünfeckflächner*.

VIII. Bezeichnung der einfachen hauptaxigen Gestalten und ihrer Flächen.

Wenn man von einer Gestalt bloss angiebt, sie sei z. B. eine gleichstellig 2endige 2fach 6gliedrige und sei ein 2 × 12-flächiger Ebenrandner, so ist dadurch die Beschaffenheit ihrer

---

* Die Abbildung dieser Gestalt ist die 3gliedrige Projection einer solchen, während die des 120wandigen Dreieckflächners und der meisten übrigen Gestalten 1fach 1gliedrige Projectionen sind, bei denen die hintere, dem Beschauer nicht zugekehrte Seite durch punktirte Linien gleichfalls angedeutet ist, während diese hier weggelassen [illegible]. Würde eine 3gliedrige Axe senkrecht auf die Ebene [illegible] genommen worden sein, so hätte man die 3gliedrigen [illegible] u. s. w.

Form noch keineswegs vollständig bestimmt; denn bei gleicher Beschaffenheit und Grösse des mittleren Querschnittes kann die Grösse der Hauptstrahlen verschieden sein zwischen 0 und ∞, und nur dieses sind die Grenzen, wo die Gestalt aufhört ein 2 × 12flächiger Ebenrandner zu sein; auch können bei unveränderten 2fach 2gliedrigen Querstrahlen 1ster Art die 2fach 2gliedrigen Querstrahlen 2ter Art verschieden sein zwischen 0 und ∞ und die Gestalt bleibt immer noch ein 2 × 12flächiger Ebenrandner. Es ist also eine bestimmte Angabe nöthig, aus welcher die Grösse des Hauptstrahles, des 2fach 2gliedrigen Querstrahles 2ter Art erkannt werden kann, wenn die Gestalt eine vollständig bestimmte sein soll. Die Aufgabe, aus der hinreichenden Anzahl gegebener Stücke einen solchen 2 × 12flächigen Ebenrandner zu bestimmen, kann auf sehr verschiedene Weise gestellt werden. Ist aber der Zweck vorhanden, den die Aufgabe Lösenden möglichst schnell ein deutliches bestimmtes Bild gewinnen zu lassen von der Gestalt, die er sich denken oder in seinem Geiste gleichsam wieder erschaffen soll, so leidet es wohl keinen Zweifel, dass die unmittelbare Angabe der Grösse der 3 wichtigsten Strahlenarten hierzu am meisten geeignet ist.

Ein *Zeichen*, bestehend aus einer Zusammenstellung dreier Grössen, deren eine die Grösse des Hauptstrahls, die andere die Grösse des 2fach 2gliedrigen Querstrahls 1ster Art und die 3te [**137**] jene des 2fach 2gliedrigen Querstrahls 2ter Art ist, in einer gleichstellig 2endigen 2fach 6gliedrigen einfachen Gestalt, dient daher besser, als eine noch so ausführliche Beschreibung oder etwaige besondere Benennung derselben, um sie von jeder andern gleichstellig 2endigen 2fach 6gliedrigen Gestalt zu unterscheiden.

Berücksichtigt man, dass die Strahlen nichts anderes sind, als Linien, deren je zwei zusammen in einer und derselben Axe, nur in entgegengesetzter Richtung, liegen, so ist einleuchtend, dass für die als Beispiel gewählte gleichstellig 2endige 2fach 6gliedrige Gestalt und für jede gleichstellig 2endige 2fach *p*gliedrige überhaupt, deren *p* eine gerade Zahl ist, die 2fach 2gliedrigen Querstrahlen 1ster Art in 2fach 2gliedrigen Queraxen 1ster und jene Querstrahlen 2ter Art in eben solchen Queraxen 2ter Art liegen, mithin die beiden wichtigsten Arten von Queraxen bei der Bezeichnung zum Grunde liegen, wenn die beiden wichtigsten Arten von Querstrahlen im Zeichen enthalten sind. Bei gleichstellig

2endigen 2fach 3gliedrigen und überhaupt bei solchen gleichstellig 2endigen 2fach $p$gliedrigen Gestalten, deren p eine ungerade Zahl ist, liegt jeder 2fach 2gliedrige Querstrahl 2ter Art mit einem 2fach 2gliedrigen Querstrahle 1ster Art in einer 2fach 2gliedrigen ungleichendigen Queraxe. Eine Bezeichnung, welche sich hier auf die beiden wichtigsten Queraxenarten mit beziehen soll, muss also enthalten: einen der beiden ungleichen Strahlen einer ungleichendigen 2fach 2gliedrigen Queraxe und einen solchen Strahl, der in einer gleichstellig 2endigen 2fach 1gliedrigen Queraxe liegt, während die Bestimmung, welche sich auf die beiden wichtigsten Querstrahlenarten bezieht, einen 2fach 2gliedrigen Querstrahl erster und einen solchen zweiter Art enthält.

Die nachbarlichen Querstrahlen 1ster und 2ter Art R und r in irgend einem 2fach $p$gliedrigen Systeme bilden mit einander einen Winkel $= \frac{360^\circ}{2p}$. Der Strahl, welcher diesen Winkel halbirt, heisse ϱ, der Winkel $\frac{360^\circ}{4p}$ sei $= \psi$ und $\text{Cos.}\ 2\psi = q$. Dann ist

$$1)\quad \varrho = \frac{2Rr \cdot \text{Cos.}\ \psi}{R+r} = \frac{R \cdot r\sqrt{2(q+1)}}{R+r},$$

$$2)\quad r = \frac{\varrho \cdot R}{2R \cdot \text{Cos.}\ \psi - \varrho} = \frac{\varrho \cdot R}{R\sqrt{2(q+1)} - \varrho},$$

[138] $$3)\quad R = \frac{\varrho \cdot r}{2r \cdot \text{Cos.}\ \psi - \varrho} = \frac{\varrho \cdot r}{r\sqrt{2(q+1)} - \varrho}.$$

Aus der einen Beziehung lässt sich demnach die andere herleiten und umgekehrt.

Nur in dem Falle, wenn $p = 1$, also $\psi = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ und $\text{Cos.}\ \psi = 0$ wird, hat man $r = \frac{\varrho \cdot R}{-\varrho} = -R$,

also $$R + r = 0$$

und $$\varrho = \frac{2R \cdot r \cdot 0}{R+r} = \frac{2R \cdot r \cdot 0}{0},$$

so dass also r durch R und ϱ als $= -R$ bestimmt wird,

während nicht umgekehrt ϱ durch R und r bestimmt werden kann.

Es mag hier genügen, bloss diejenige Bezeichnung und Bestimmung der Gestalten der verschiedenen hauptaxigen Systeme aufzustellen, bei welcher, ausser dem einen Strahle der Hauptaxe, Strahlen der beiden wichtigsten Arten von Queraxen für jede einfache Gestalt angegeben werden. Bei ihrer Anwendung wird das minder Regelmässige aus dem Regelmässigeren abgeleitet. Es ist daher mit den regelmässigsten hauptaxigen Gestaltensystemen, den gleichstellig 2endigen 2fach $p$gliedrigen, deren p eine gerade Zahl ist, zu beginnen.

Fig. 309. Es seien A, B, C Horizontalprojectionen von 2×4-, 2×8- und 2×12flächigen Ebenrandnern, welche als Beispiele von solchen $2 \times t$flächigen Ebenrandnern gewählt sind, bei denen t das Doppelte einer geraden Zahl p ist. Die 2fach 2gliedrigen Querstrahlen der 1sten Art mögen mit R, die der 2ten Art mit r bezeichnet werden, so dass R oder r die Länge eines solchen Strahles angiebt. Die Länge der halben Hauptaxe, die auf jeder solchen Projection senkrecht im Mittelpunkte c aufstehend zu denken ist, sei $= a$. Es ist einleuchtend, dass der $2 \times t$flächige Ebenrandner, in welchem der Hauptstrahl $= a$, der Querstrahl 1ster Art $= R$ und der Querstrahl 2ter Art $= r$ ist, ein solcher von bestimmter Form und Grösse sein wird, wenn a, R, r und t bestimmte bekannte Grössen sind. Von dem Verhältnisse $a : R : r$ hängt die Beschaffenheit der Form der fraglichen Gestalt ab. Ist die Grösse von a oder von R oder von r und ausserdem das Verhältniss $a : R : r$ bekannt, so ist auch Grösse und Form der Gestalt bekannt, wenn, wie in der Folge stets vorausgesetzt wird, t bekannt ist.

Fig. 310. [**139**] Es sei ca' ein Strahl a und cR' ein Strahl R und cr' ein zu cR' nachbarlicher Strahl r, so wird das Dreieck $a'R'r'$ eine der Flächen des $2 \times t$flächigen Ebenrandners darstellen, deren Lage durch die 3 in ihr gegebenen Punkte a', R' und r' bestimmt ist.

Nennt man die am Mittelpunkte c entstehende Ecke, für welche die Bestimmungsstrahlen ca', cR', cr' als Kantenlinien und die Ebenen $R'cr'$, $a'cr'$, $a'cR'$ als die die Ecke bildenden Ebenen anzusehen sind, oder vielmehr den Raum, den diese 3 Ebenen begrenzen, eine *Zelle* (*cellula*), so kann man sagen: die Fläche $a'R'r'$ gehöre dieser Zelle an. Um einen

und denselben 2fach 2gliedrigen Querstrahl herum liegen also 4 Zellen. Diese 4 Zellen bilden zusammen genommen einen Hauptaxenflügel, der von 2 ebenbildlichen doppelten Flügelflächen eingeschlossen ist. Es ist hier also bei hauptaxigen Gestalten jede Zelle ein *Flügelviertel.* Bezeichnet man daher die Strahlen R und r mit Nummern I, II, III ..., als R^{I}, R^{II}, Fig. 309. R^{III} ... r^{I}, r^{II}, r^{III} ... und auch den aufwärts gerichteten Hauptstrahl durch a^{I}, den abwärts gerichteten durch a^{II}, so kann durch das Zeichen (a^{I}, R^{I}, r^{I}) eine der Flächen des $2 \times t$flächigen Ebenrandners besonders bezeichnet werden, während eine zweite durch (a^{I}, R^{II}, r^{I}), eine dritte durch (a^{I}, R^{II}, r^{II}) u. s. w. bezeichnet wird. Eben so hat man abwärts die Flächen (a^{II}, R^{I}, r^{I}), (a^{II}, R^{II}, r^{I}), (a^{II}, R^{II}, r^{II}) u. s. w. Es wird hierdurch also zugleich angegeben, in welchem Hauptaxenflügel und in welchem der 4 Viertel desselben, d. h. in welcher Zelle, die bezeichnete Fläche liegt. Das Zeichen $a'R'r'$ oder a', R', r' (ohne Klammer) bedeutet daher eine bestimmte Zelle.

Es ergiebt sich wohl von selbst, dass man, wenn kein besonderer Grund vorhanden ist, die gleichwerthigen Flächen einzeln aufzuzählen und zu betrachten, bei einer 2fach $p$gliedrigen gleichstellig 2endigen Gestalt mit Flächen von einerlei Art nur nöthig hat, die Fläche eines einzigen Flügelviertels anzugeben, indem die der übrigen Flügelviertel zugleich dadurch mit bedingt werden. Man setze daher vorerst fest, es sei das Flügelviertel, in welchem diese zu bestimmende Fläche liegt, das erste und die ihm angehörigen Strahlen a^{I}, R^{I} und r^{I}. Sollten Theile einer und derselben Ebene in verschiedenen Flügelvierteln der Hauptaxe als Begrenzungsflächen bei einer gleichstellig 2endigen 2fach $p$gliedrigen Gestalt vorkommen, so ist jeder solcher Theil innerhalb [**140**] desjenigen Flügelviertels, in welchem er liegt, als eine besondere Begrenzungsfläche zu betrachten und als solche wird er auch im ersten Flügelviertel vorhanden sein müssen und sich besonders bestimmen lassen in *diesem.*

Wenn in der Formel (a', R', r') die Werthe von a', R' oder r' sich ändern, so wird dadurch die Lage der Fläche (a', R', r') in dem bestimmten Flügelviertel a', R', r' der Hauptaxe, über welches hinaus sie als Begrenzungsfläche einer gleichartigflächigen 2fach $p$gliedrigen gleichstellig 2endigen Gestalt sich nicht erstreckt, verändert. Umgekehrt, wenn die Lage dieser Fläche in dem Flügelviertel, dem sie angehört,

eine andere*) wird, so ändern sich auch die Werthe für
Fig. 310. a', R', r'. Hat sich z. B. die Fläche $a'R'r'$ um die ruhig gebliebene Randkante $R'r'$ als um eine in ihr liegende Umdrehungsaxe gedreht, so lange, bis sie auf dem mittleren Querschnitte $cR'r'$ senkrecht steht, so dass sie nun den Strahl a' desjenigen Flügelviertels, dem sie angehört, nicht mehr schneidet, sondern ihm parallel liegt, so wird der Werth von $a' = \infty$ und das ganze Zeichen $(\infty a', R', r')$. Die ganze Gestalt des $2 \times t$flächigen Ebenrandners wird dadurch zu einer $2 \times p$flächigen Säule, ihr Querschnitt wird gleich dem Mittelquerschnitte des Ebenrandners, aus dem sie hervorgegangen ist, und das Zeichen (∞, R, r) bezeichnet diese Säule. Dreht sich die fragliche Fläche $a'R'r'$ auf diese Art noch weiter fort, so wird sie mit dem Strahle a' ihres Flügelviertels divergiren und nur ihre Verlängerung über die Randkante hinaus wird die Verlängerung des Strahles a' über den Mittelpunkt hinaus schneiden, so dass hier also der Werth von a' durch ∞ in das Negative übergeht. Die Fläche wäre dann zu bezeichnen durch $((-a'), R', r')$ und der ganze von solchen Flächen gebildete $2 \times t$flächige Schiefwandner**) durch $((-a), R, r)$.

Lässt man die Fläche des Flügelviertels a', R', r' sich noch weiter fort auf die angegebene Weise bewegen, so wird das [141] $-a'$ eine immer kleinere negative Grösse und wird zuletzt $= -\frac{1}{\infty}$. Der Ausdruck $\left(\left(-\frac{1}{\infty} a'\right), R', r'\right)$ bedeutet daher Flächen, die in die Verlängerung des mittleren Querschnittes fallen, während der Ausdruck $\left(\frac{1}{\infty} a', R', r'\right)$ Flächen anzeigt, die mit diesem Querschnitte selbst zusammenfallen***).

Fig. 310. Lässt man umgekehrt die Fläche $a'R'r'$ sich um eine, durch den Punkt a' gehend gedachte, mit $R'r'$ parallele

---

*) Eine ihre Lage verändernde Ebene, wenn sie durch mehr als ein Flügelviertel hindurch sich erstreckend gedacht wird, kann nach geschehener Lagenänderung in einem andern Flügelviertel so liegen, wie sie vorher im ersten lag.

Fig. 311. **) Bei ihm ist jeder Schnitt, in welchem die Hauptaxe liegt, da p eine gerade Zahl ist, eine Figur wie $klmn$, jeder Querschnitt ein 2fach $p$gliedriges $t$seit.

***) Um nicht positive und negative Nullen unterscheiden zu müssen, wird hier $\frac{1}{\infty}$ nicht $= 0$ gesetzt.

Linie bewegen, so dass zuerst die Strahlen cR' und cr' sich dabei vergrössern, so wird bei Fortsetzung dieser Bewegung einmal $a'R'r'$ parallel mit $cR'r'$ werden müssen, und dann sind die Strahlen R' und r' unendlich, die Fläche $a'R'r'$ ist dann $= (a', \infty R', \infty r')$; das Zeichen (a, ∞, ∞) bedeutet daher in dem gleichstellig 2endigen 2fach $p$gliedrigen und in jedem gleichendigen Gestaltensysteme die beiden Tafelflächen. Findet die Fortsetzung dieser Bewegung der Fläche $a'R'r'$ statt, so tritt der Fall ein, in welchem die über den Scheitel rückwärts hinausgehend gedachte Verlängerung dieser Fläche sich mit den, über den Mittelpunkt des Strahlensystems rückwärts hinausgehend zu denkenden, Verlängerungen der Strahlen R' und r' schneidet. Ihr Zeichen erhält dann die Form $(a', (-R'), (-r'))$. Dem Zeichen $(a, (-R), (-r))$ entspricht ein $2 \times t$flächiger Schiefwandner, dessen Mittelquerschnitt eine unendliche Ebene ist, während jeder Hauptschnitt, sofern p eine gerade Zahl ist, eine Figur wird wie $mnkl$*). Fig. 312.

Durch das bis jetzt Entwickelte ist ersichtlich, welche Bedeutung das Vorhandensein von negativen Werthen für die Grösse der Strahlen a', R', r' in dem Zeichen, durch welches eine Begrenzungsfläche einer 2fach $p$gliedrigen gleichstellig 2endigen Gestalt mit gleichwerthigen Flächen bestimmt wird, hat. Auch [142] ergiebt sich, dass der Strahl R', um die allgemeinen Verschiedenheiten der Lage einer Begrenzungsfläche zu entwickeln, in folgenden Werthen betrachtet werden müsse:

1) als eine positive endliche Grösse, die zu dem hier vorliegenden Zwecke = 1 gesetzt werden kann;

2) als ∞;

3) als eine negative endliche Grösse, die $= -1$ anzunehmen ist;

4) als eine negative unendlich kleine Grösse $= -\frac{1}{\infty} R'$ $= -\frac{1}{\infty} R$;

---

*) Für $p = 6$ und $R : r = 1 : \text{Cos.} \frac{360^\circ}{2p} = 1 : \sqrt{\frac{3}{4}}$ hat man einen hierher gehörigen Schiefwandner, wenn man an den 6flächigen Säulen mit 6flächig trichterartig vertieften Enden, wie sie z. B. beim Apatit vorkommen, von den Seitenflächen der Säule absieht. Vergl. *Leonhard's* Mineralog. Zeitschrift Jahrg. 1826. I. 439.

5) als eine positive unendlich kleine Grösse $= \frac{1}{\infty} R'$ $= \frac{1}{\infty} R$; während auf ähnliche Weise die 5 Werthe, welche a' haben kann, für jeden der 5 Werthe von R' auszudrücken sind durch 1) a', 2) ∞, 3) $-a'$, 4) $-\frac{1}{\infty} a'$, 5) $\frac{1}{\infty} a'$; die Werthe aber, welche r' haben kann für den Werth von $R' = 1$, haben nothwendig eine der folgenden 11 Formen:

$$-r,\ -\frac{1}{\infty} r,\ \frac{1}{\infty} r,\ q - v,\ q,\ q + x,\ 1,\ \frac{1}{q} - y,$$
$$\frac{1}{q},\ \frac{1}{q} + z,\ \infty,$$

wenn nämlich $q = \text{Cos.}\,\frac{360^\circ}{2p}$ und die Buchstaben v, x, y und z unbestimmte Grössen von solcher Beschaffenheit bedeuten, dass $q - v > \frac{1}{\infty} r$ und $< q$, und ebenso $q + x > q$ aber < 1, ferner $\frac{1}{q} - y > 1$ aber $< \frac{1}{q}$, und endlich $\frac{1}{q} + z > \frac{1}{q}$. Setzt man $q - v = \mathfrak{r}$ und $q + x = \mathfrak{R}$ und $\frac{1}{q} - y = \frac{1}{\mathfrak{R}}$, $\frac{1}{q} + z = \frac{1}{\mathfrak{r}}$, so hat man demnach für $R' = 1$ folgende Ausdrücke für R', r' zu beachten*):

$$1,\ -r \mid 1,\ -\frac{1}{\infty} r \mid 1,\ \frac{1}{\infty} r \mid 1,\ \mathfrak{r} \mid 1,\ q \mid 1,\ \mathfrak{R} \mid$$
$$1,\ 1 \mid 1,\ \frac{1}{\mathfrak{R}} \mid 1,\ \frac{1}{q} \mid 1,\ \frac{1}{\mathfrak{r}} \mid 1,\ \infty.$$

[143] Daraus folgt, dass für $R' = -1$ als die vorzüglich wichtigen Arten des Ausdruckes R', r' anzusehen sind:

---

*) Als blosse Verhältnisse zweier Grössen sind diese Ausdrücke nicht zu betrachten, weil es hier zugleich noch ankommt auf das Verhältniss $R' : a'$ und $r' : a'$ und auf die Grösse von a' oder R' oder r'.

$-1, r \mid -1, \frac{1}{\infty} r \mid -1, -\frac{1}{\infty} r \mid -1, -\mathfrak{r} \mid -1, -q \mid$

$-1, -\mathfrak{R} \mid -1, -1 \mid -1, -\frac{1}{\mathfrak{R}} \mid -1, -\frac{1}{q} \mid -1, -\frac{1}{\mathfrak{r}} \mid$

$-1, \infty.$

Ist $R' = \infty$ oder $= \frac{1}{\infty} R$ oder $= -\frac{1}{\infty} R$, so kommt es **zunächst** darauf an, ob r' endlich und positiv oder endlich **und** negativ oder unendlich klein und positiv oder unendlich **klein** und negativ oder ob r' unendlich gross ist, so dass für **jeden** jener drei Werthe von R' die 5 Werthe für r' aus**gedrückt** werden können durch

$$-1 \mid -\frac{1}{\infty} r \mid \frac{1}{\infty} r \mid 1 \mid \infty$$

und also noch folgende Ausdrücke für R', r' entstehen:

$\infty, -1 \mid \infty, -\frac{1}{\infty} r \mid \infty, \frac{1}{\infty} r \mid \infty, 1 \mid \infty, \infty \mid$

$\frac{1}{\infty} R, -1 \mid \frac{1}{\infty} R, -\frac{1}{\infty} r \mid \frac{1}{\infty} R, \frac{1}{\infty} r \mid \frac{1}{\infty} R, 1 \mid \frac{1}{\infty} R, \infty \mid$

$-\frac{1}{\infty} R, -1 \mid -\frac{1}{\infty} R, -\frac{1}{\infty} r \mid -\frac{1}{\infty} R, \frac{1}{\infty} r \mid -\frac{1}{\infty} R, 1 \mid$

$-\frac{1}{\infty} R, \infty.$

Die Verbindung sämmtlicher Ausdrücke von R', r' mit jedem der Ausdrücke für a' giebt die wichtigsten Hauptarten des Ausdruckes (a', R', r'), wobei jedoch, wenn 2 oder 3 unendlich kleine Werthe $\left(\pm \frac{1}{\infty} a, \pm \frac{1}{\infty} r\right.$ oder $\pm \frac{1}{\infty} a, \pm \frac{1}{\infty} R$ oder $\left.\pm \frac{1}{\infty} R, \pm \frac{1}{\infty} r\right)$ verbunden sind, wieder das Verhältniss derselben ein verschiedenes sein kann, indem hier z. B. $\frac{1}{\infty} R : \frac{1}{\infty} r = R : r$ ist. Berücksichtigt man, dass die Fälle, wobei unendlich kleine positive oder negative Werthe der Strahlen a', R', r vorkommen, untergeordnet werden können

jenen, wobei kleine endliche Werthe derselben Strahlen vorhanden sind, so bleiben als Werthe

von a'	von R'
1) a	1) 1
2) ∞	2) ∞
3) $-a$	3) -1,

144 und als Werthe des Ausdruckes R', r'

1, 1 — 1, — 1

[illegible]

und ausserdem noch die Werthe

[illegible]

[illegible]

	$(\infty, 1, 1)$	$\infty, (-1), (-1)$	
$\supset, 1, \mathfrak{R})$	$\left(\infty, 1, \frac{1}{\mathfrak{R}}\right)$	$(\infty, (-1), (-\mathfrak{R}))$	$\left(\infty, (-1), \left(-\frac{1}{\mathfrak{R}}\right)\right)$
$\supset, 1, q)$	$\left(\infty, 1, \frac{1}{q}\right)$	$(\infty, (-1), (-q))$	$\left(\infty, (-1), \left(-\frac{1}{q}\right)\right)$
$\supset, 1, \mathfrak{r})$	$\left(\infty, 1, \frac{1}{\mathfrak{r}}\right)$	$(\infty, (-1), (-\mathfrak{r}))$	$\left(\infty, (-1), \left(-\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)\right)$
. . .	$(\infty, 1, \infty)$	. . . .	. . . .
$\supset, 1, (-r))$	. . . .	$(\infty, (-1), r)$	. . . .
$\supset, \infty, 1)$	. . . .	. . . .	. . . .

45]

	$((-a), 1, 1))$	$((-a), (-1), (-1))$	
$-a), 1, \mathfrak{R})$	$\left((-a), 1, \frac{1}{\mathfrak{R}}\right)$	$((-a), (-1), (-\mathfrak{R}))$	$\left((-a), (-1), \left(-\frac{1}{\mathfrak{R}}\right)\right)$
$-a), 1, q)$	$\left((-a), 1, \frac{1}{q}\right)$	$((-a), (-1), (-q))$	$\left((-a), (-1), \left(-\frac{1}{q}\right)\right)$
$-a), 1, \mathfrak{r})$	$\left((-a), 1, \frac{1}{\mathfrak{r}}\right)$	$((-a), (-1), (-\mathfrak{r}))$	$\left((-a), (-1), \left(-\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)\right)$
. . .	$((-a), 1, \infty)$	. . . .	$((-a), (-1), \infty)$
$-a), 1, (-r))$	. . . .	$((-a), (-1), r)$	. . . .
$-a), \infty, 1)$	. . . .	$((-a), \infty, (-1))$	. . . .

ı sind hier die Fälle $((-a), \infty, \infty)$ und $(\infty, (-1), \infty)$ ıd $(\infty, \infty, (-1))$ nicht mit aufgeführt, weil sie Flächen ızeichnen, welche nicht in der Zelle a', R', r' liegen können, dem sie die Grenzen bezeichnen, welche (a', R', r') nicht reichen darf, ohne aufzuhören, eine hierher gehörige, d. h. der Zelle a', R', r' auftretende Begrenzungsfläche zu sein.

Setzt man ∞a oder ∞R oder ∞r in diejenigen Stellen, orin statt a oder R oder r ein blosses ∞ Zeichen sich beıdet, und multiplicirt man jedes der 3 Glieder in jeder der) Formeln mit $\frac{1}{\infty}$, so erhält man 59 neue Formeln, unter elchen diejenigen, die kein — Zeichen enthalten, 1) wenn e vor dieser Veränderung *kein* ∞ Zeichen enthielten, bloss

Zeichen für den Mittelpunkt des Strahlensystems sind, insofern er als das erste Element dieser oder jener ringsum endlich begrenzten Gestalt betrachtet wird, gleichsam eine solche Gestalt von unendlich kleinen Abmessungen ist; 2) wenn sie vorher *ein* ∞ Zeichen hatten und also jetzt eine der 3 Formen $\left(a, \frac{1}{\infty} R, \frac{1}{\infty} r\right)$ oder $\left(\frac{1}{\infty} a, R, \frac{1}{\infty} r\right)$ oder $\left(\frac{1}{\infty} a, \frac{1}{\infty} R, r\right)$ haben, die Strahlen a, R, r selbst bezeichnen, sofern diese als die ersten Elemente der Gestalten (∞a, R, r) oder (a, ∞R, r) oder (a, R, ∞r) angesehen werden können; 3) wenn sie vorher *zwei* ∞ Zeichen enthielten, jetzt also im Allgemeinen eine der Formen $\left(\frac{1}{\infty} a, R, r\right)$ oder $\left(a, \frac{1}{\infty} R, r\right)$ oder $\left(a, R, \frac{1}{\infty} r\right)$ haben, Ebenen bezeichnen, von denen die erste dem mittleren Querschnitte, dagegen die 2te sowohl als die 3te einer doppelten Hauptflügelfläche (der 1sten [146] oder 2ten Art) entspricht, die als Grenze des Flügelviertels, von dem es sich handelt, auftritt; diejenigen endlich, welche ein oder zwei oder drei — Zeichen enthalten, Gestalten bezeichnen, deren Flächen im Mittelpunkte des Strahlensystems sich vereinigen*).

Bisher wurde zum Behuf der Bestimmung der Lage einer Begrenzungsfläche in einer Zelle bei gleichstellig 2endigen 2fach $p$gliedrigen Gestalten, deren p eine gerade Zahl ist, vorausgesetzt, dass in jeder Zelle jeder der 3 Bestimmungsstrahlen derselben in seiner natürlichen Richtung vom Mittelpunkte des Strahlensystems an nach aussen hin positiv zu

---

*) Grössere Ausführlichkeit über diese und über alle jene einfachen Gestalten, welche von gleichwerthigen Flächen begrenzt sind, in deren Zeichen der Werth von einem oder von zwei oder von drei der Bestimmungsstrahlen a', R', r' negativ ist, scheint erst später für die Krystallkunde von Wichtigkeit zu werden, wenn die bisher als *zufällige* gestörte Bildungen betrachteten Gestalten mit trichterartigen Vertiefungen, statt dieser oder jener Fläche (Apatit, Eis, Kochsalz, Wismuth u. s. w.), und alle jene Formen, bei denen gleichsam nur das Gerippe zu einem Krystalle ausgebildet ist (Schneeflocken, Gestricktes u. s. w.), noch sorgfältiger werden untersucht sein. Dessen ungeachtet aber werden, wenigstens für die Krystallkunde, jene Gestalten stets die wichtigsten bleiben, in denen keiner der Werthe der Strahlen a', R', r' negativ ist.

nehmen sei, und kein Unterschied gesetzt zwischen die $2 \times t$ Flügelviertel oder Zellen, die in einem solchen Strahlensysteme vorhanden sind. Stellt man sich aber vor, der Strahl R', insofern er der Zelle $a' R' r'$ angehört, sei der Stellvertreter für die Verbindung (Combination) der Strahlen R^I, R^{II}, R^{III}, R^{IV}, ..., wie sie in dem fraglichen Strahlensysteme stattfindet, in derjenigen Stellung des Strahlensystems, in welcher jeder der Strahlen a', R', r' als der erste, z. B. oberste, seiner Art auftritt, d. h. in einer bestimmten solchen Stellung des Strahlensystems, bei welcher irgend ein in dem Flügelviertel $a^I R^I r^I$ liegender 1fach 1gliedriger Strahl (er heisse x) senkrecht aufwärts gerichtet ist, so ist einleuchtend, dass der Strahl R^{II} für das Flügelviertel $a^I R^{II} r^{II}$ z. B. gleichfalls als Stellvertreter sämmtlicher verbundenen (combinirten) Strahlen R zu betrachten sei; dass aber dieser Strahlencombination eine andere Stellung (Versetzung, Permutation), als vorher, eigen sein müsse, indem jetzt der Strahl R^{II} als der oberste seiner Art auftritt und die Stelle einnimmt, welche vorher R^I einnahm, während [147] der Strahl a^I für die Zelle $a^I R^{II} r^{II}$ dieselbe Stelle einnimmt, die er für das Flügelviertel $a^I R^I r^I$ vorher einnahm. Auch ist der dem Strahle x^I entsprechende Strahl x^{II} an die Stelle von x getreten. Man setze fest, die combinirten Strahlen einer Art seien für jede Zelle aufzuzählen, dass, wenn der Strahl x der Zelle aufwärts gerichtet ist, derjenige Strahl der fraglichen Art, z. B. R, welcher am meisten sich der senkrecht aufwärts gerichteten Lage nähert, die erste Stelle einzunehmen habe in der Permutation und dass die übrigen in derjenigen Ordnung nach einander folgen sollen, in welcher sie sich mehr und mehr von der senkrecht aufwärts gerichteten Lage entfernen. Es wird dann z. B. bei einer gleichstellig 2endigen 2fach 6gliedrigen Gestalt Fig. 309 c.

dem Flügelviertel entsprechen				die Strahlenpermutation					
$a^I R^I r^I$	oder	$a^{II} R^I r^I$	...	R^I	R^{II}	R^{VI}	R^{III}	R^V	R^{IV}
$a^I R^{II} r^I$	-	$a^{II} R^{II} r^I$	...	II	I	III	VI	IV	V
$a^I R^{II} r^{II}$	-	$a^{II} R^{II} r^{II}$	...	II	III	I	IV	VI	V
$a^I R^{III} r^{II}$	-	$a^{II} R^{III} r^{II}$	...	III	II	IV	I	V	VI
$a^I R^{III} r^{III}$	-	$a^{II} R^{III} r^{III}$	...	III	IV	II	V	I	VI
$a^I R^{IV} r^{III}$	-	$a^{II} R^{IV} r^{III}$	...	IV	III	V	II	VI	I
$a^I R^{IV} r^{IV}$	-	$a^{II} R^{IV} r^{IV}$	...	IV	V	III	VI	II	I
$a^I R^V r^{IV}$	-	$a^{II} R^V r^{IV}$	...	V	IV	VI	III	I	II
$a^I R^V r^V$	-	$a^{II} R^V r^V$	...	V	VI	IV	I	III	II

dem Flügelviertel entsprechen		die Strahlenpermutation
$a^I R^{VI} r^V$ oder $a^{II} R^{VI} r^V$	. . .	VI V I IV II III
$a^I R^{VI} r^{VI}$ - $a^{II} R^{VI} r^{VI}$	. . .	VI I V II IV III
$a^I R^I r^{VI}$ - $a^{II} R^I r^{VI}$	. . .	I VI II V III IV.

Auf ähnliche Weise erhält man für $a^I R^I r^I$ und $a^{II} R^I r^I$ mit einander übereinstimmende Permutationen der Strahlen r, aber wieder verschiedene für $a^I R^I r^I$, $a^I R^{II} r^I$, $a^I R^{II} r^{II}$ u. s. w. Für sämmtliche Flügelviertel, welche a^I enthalten, gilt die Permutation $a^I a^{II}$ und für alle, welche a^{II} enthalten, die Permutation $a^{II} a^I$. Sieht man nun den Gegensatz zwischen den beiden binären Permutationen 1 · 2 und 2 · 1 als ähnlich dem Gegensatze zwischen vorwärts und rückwärts, zwischen + und — an und bezeichnet von 2 Permutationen derselben Combination, welche mit einander übereinstimmen hinsichtlich auf die Stellung aller ihrer Elemente, bis auf 2 derselben, die mit einander gegenseitig vertauscht werden mussten, um die eine der beiden Permutationen in die andere zu verwandeln, die eine mit + und die [148] andere mit —*), so können auch die hier vorkommenden Permutationen in dieser Rücksicht betrachtet werden**).

---

*) So ist also z. B., wenn 1234 positiv ist, 2134 negativ, wenn *fghiklm* positiv ist, auch *fgmiklh* negativ.

**) Vergleiche *Hessel*: Ueber positive und negative Permutationen. Marburg bei Garthe, 1823. Hier möge nur so viel zur Erläuterung dienen, dass, wenn eine Permutation als + gesetzt, gegeben oder angenommen ist und man von einer anderen Permutation derselben Elementencombination wissen will, ob sie mit + oder — zu bezeichnen sei, man nach folgender Regel verfahren könne, die gleich auf irgend ein Beispiel angewendet dargestellt werden möge.

Aufgabe. Es sei gegeben + 123456; man will wissen, ob 365214 mit + oder — zu bezeichnen sei.

Auflösung. Suche in der gegebenen positiven Permutation von links an das erste Element, welches nicht mit dem in derselben Stelle stehenden der zu bestimmenden Permutation gleichnamig ist (hier also 1), und vertausche es mit dem Elemente (3), das in der zu bestimmenden Permutation an dieser Stelle steht. Es wird so aus der gegebenen positiven Permutation (+ 123456) eine neue entstehen (321456), welche wegen der stattgefundenen gegenseitigen Vertauschung zweier Elemente eine negative (— 321456) sein wird. An dieser sucht man nun wieder das erste Element, von links an gezählt, auf, welches von dem in derselben Stelle der zu bestimmenden Permutation stehenden abweicht, und vertauscht mit dem dahin gehörigen gegenseitig, so entsteht eine positive Permutation (aus — 321456 wird + 361452). So fährt man fort, aus der jedesmal erhaltenen neuen positiven oder negativen Permutation eine andere negative oder positive zu erzeugen, die

Setzt man die Permutation *I II VI III V IV* als positiv, so hat man*): [**149**]

+ *I II VI III V IV*	— *IV V III VI II I*
— *II I III VI IV V*	+ *V IV VI III I II*
— *II III I IV VI V*	+ *V VI IV I III II*
+ *III II IV I V VI*	— *VI V I IV II III*
+ *III IV II V I VI*	— *VI I V II IV III*
— *IV III V II VI I*	+ *I VI II V III IV*.

Man kann daher den Strahl R^I in jeder der beiden Zellen $a^I R^I r^I$ und $a^{II} R^I r^I$ als positiv $= + R^I$ betrachten, während er in den beiden anliegenden $a^I R^I r^{VI}$ und $a^{II} R^I r^{VI}$ gleichfalls als positiv erscheint, so dass der 2fach 2gliedrige Strahl R^I

---

der zu bestimmenden (hinsichtlich auf die Stellung von wenigstens einem Elemente mehr) näher verwandt ist, als die, aus welcher sie entwickelt wurde, bis man eine solche erhält, die mit der zu bestimmenden Permutation vollkommen einerlei ist. Man erhält also nach und nach die Permutation

	3 6 5 2 1 4,	
wenn man aus	+ 1 2 3 4 5 6	macht
die Permutation	— 3 2 1 4 5 6	und aus dieser
- -	+ 3 6 1 4 5 2	- - -
- -	— 3 6 5 4 1 2	- - -
- -	+ 3 6 5 2 1 4,	

so dass also die Permutation 365214 positiv ist, wenn 123456 positiv war.

*) Zur Erläuterung möge hier die Ableitung jeder folgenden aus der vorhergehenden solchen Permutation stehen. Die mit dem Zeichen (*) versehenen sind die hierher gehörigen, auf deren Vorzeichen es ankommt.

+ 1 2 6 3 5 4 *	— 4 5 3 6 2 1 *
— 2 1 6 3 5 4	+ 5 4 3 6 2 1
+ 2 1 3 6 5 4	— 5 4 6 3 2 1
— 2 1 3 6 4 5 *	+ 5 4 6 3 1 2 *
+ 2 3 1 6 4 5	— 5 6 4 3 1 2
2 3 1 4 6 5 *	+ 5 6 4 1 3 2 *
+ 3 2 1 4 6 5	— 6 5 4 1 3 2
— 3 2 4 1 6 5	+ 6 5 1 4 3 2
+ 3 2 4 1 5 6 *	— 6 5 1 4 2 3 *
— 3 4 2 1 5 6	+ 6 1 5 4 2 3
+ 3 4 2 5 1 6 *	— 6 1 5 2 4 3 *
— 4 3 2 5 1 6	+ 1 6 5 2 4 3
+ 4 3 5 2 1 6	— 1 6 2 5 4 3
— 4 3 5 2 6 1 *	+ 1 6 2 5 3 4 *.
+ 4 5 3 2 6 1	

gleichsam aus 4 einzelnen 1fach 1gliedrigen positiven Strahlen zusammengesetzt erscheint. Eben so muss dann jeder der Strahlen R^{III}, R^{V} als aus 4 positiven 1fach 1gliedrigen Strahlen bestehend gedacht werden, während die den negativen Permutationen entsprechenden Strahlen R^{II}, R^{IV}, R^{VI} als aus 4 negativen 1fach 1gliedrigen Strahlen bestehend zu denken sind, da jeder derselben für jedes der 4 Flügelviertel, denen er angehört, einer negativen Permutation der Strahlen, welche R heissen, entspricht, gleichsam Stellvertreter derselben ist.

Setzt man ebenso den Strahl r^{I} als aus 4 positiven Strahlen bestehend, so ist jeder der Strahlen r^{I}, r^{III}, r^{V} für jede der vier Zellen, die ihn umgeben, als positiv zu setzen und jeder der Strahlen r^{II}, r^{IV}, r^{VI} gleichfalls für jede der vier Zellen, denen [150] er angehört, als negativ zu nehmen. Der obere Hauptstrahl a^{I} entspricht der positiven Permutation $a^{I}a^{II}$ für sämmtliche obere Flügelviertel, während der untere Hauptstrahl a^{II} die Stelle der negativen Permutation $a^{II}a^{I}$ für sämmtliche untere Flügelviertel vertritt; a^{I} ist also positiv, a^{II} negativ zu setzen. Ueberhaupt ist bei jeder gleichstellig 2endigen 2fach $p$gliedrigen Gestalt, für welche p das Doppelte einer ungeraden Zahl ist (d. h. für $p = 2$ oder 6 oder 10 u. s. w.), jeder Strahl R oder r mit ungerader Zeigezahl I, III, V . . . (R^{I}, R^{III}, R^{V} . . ., so wie r^{I}, r^{III}, r^{V} . . .) für jedes der vier Flügelviertel, denen er angehört, *positiv*; jeder mit gerader Zeigezahl II, IV, VI . . . (R^{II}, R^{IV}, R^{VI} . . . r^{II}, r^{IV}, r^{VI} . . .) aber für jedes der vier Flügelviertel, denen er angehört, *negativ*.

Bei gleichstellig 2endig 2fach $p$gliedrigen Gestalten, bei denen p das Doppelte einer geraden Zahl ist (d. h. für $p = 4$ oder $= 8$ oder $= 12$ . . .), hat jeder 2fach 2gliedrige Strahl (R sowohl als r) die Bedeutung von 4 (in einen einzigen Strahl zusammenfallenden, nicht mehr divergirenden) 1fach 1gliedrigen Strahlen, von denen 2 positiv und 2 negativ sind. Es ist nämlich der Strahl R^{I}, wenn er für die Zelle $a^{I}R^{I}r^{I}$ positiv ist, auch positiv für $a^{II}R^{I}r^{I}$, aber negativ für*) $a^{I}R^{I}r^{w}$ und für $a^{II}R^{I}r^{w}$. Ebenso ist dann R^{III} positiv für $a^{I}R^{III}r^{III}$ und $a^{II}R^{III}r^{III}$; aber negativ für $a^{I}R^{III}r^{II}$ und $a^{II}R^{III}r^{II}$. Allgemein R^{2n+1} ist positiv für $a^{I}R^{2n+1}r^{2n+1}$ und für

*) r^{w} soll andeuten r mit der letzten Zeigezahl, also bei 4-gliedrigen Gestalten r^{IV}, bei 8gliedrigen r^{VIII} u. s. w.

$a^{II}R^{2n+1}r^{2n+1}$, aber negativ*) für $a^{I}R^{2n+1}r^{2n}$ und für $a^{II}R^{2n+1}r^{2n}$, während R^{2n} positiv ist für $a^{I}R^{2n}r^{2n-1}$ und für $a^{II}R^{2n}r^{2n-1}$. Dieselben Gesetze gelten für r.

Auch hier ist a^{I} als $+$ und a^{II} als $-a$ zu betrachten. Das Zeichen $(+a, +R, +r)$ umfasst daher jede Fläche (a, R, r), welche in einem solchen Flügelviertel liegt, von welchem jeder der Strahlen a, R, r als Stellvertreter einer positiven Permutation der sämmtlichen combinirten Strahlen derjenigen Art, zu welcher er gehört, zu betrachten ist**).

[151] Bezeichnet man jede Zelle***) $+a, +R, +r$ mit α und jede dem Zeichen $-a, +R, +r$ entsprechende mit α', so wird auch $+a, -R, +r$ mit β und $-a, -R, +r$ mit β' bezeichnet werden können u. s. w.; man erhält daher: Fig. 309.

$+a, +R, +r = \alpha$	$-a, +R, +r = \alpha'$
$+a, -R, +r = \beta$	$-a, -R, +r = \beta'$
$+a, -R, -r = \gamma$	$-a, -R, -r = \gamma'$
$+a, +R, -r = \delta$	$-a, +R, -r = \delta'$,

und $(+a, -R, -r)$ ist daher z. B. das allgemeine Zeichen für Begrenzungsflächen, die in Flügelvierteln γ liegen $= (\gamma)$ u. s. w.

Es sind nun folgende Fälle möglich:

I. Beachtet man die Vorzeichen $+$ oder $-$ bei keinem der drei Strahlen a, R, r, so wird zwischen der Bezeichnung der 8 Arten von Zellen α, β, γ, δ und α', β', γ', δ' kein Unterschied sein, d. h. sie werden alle als gleichwerthig betrachtet:

---

*) Wie dieses sich für R^{I} modificirt, ist bereits gezeigt. Es wird hier nämlich $n = 0$ und statt r^{0} tritt r^{w} an die Stelle.

**) Es sind demnach diese Vorzeichen $+$ und $-$, namentlich das letztere, nicht zu verwechseln mit Vorzeichen, welche sich auf die Grösse des Werthes von a oder R oder r beziehen; denn auch hier [151] können die Werthe sowohl der positiven als auch der negativen Strahlen negativ werden; es bedeutet nämlich z. B. der Ausdruck $(+a, +(-R), +(-r))$ eine Fläche, die so in den Flügelvierteln $+a, +R, +r$ liegt, wie $(a, (-R), (-r))$ in jedem Flügelviertel liegen würde u. s. w.

***) Da immer zwei durch gleichnamige Buchstaben bezeichnete Zellen, z. B. α und α', über einander liegen, so kann man sich mit Hülfe der Bilder A, B, C die gegenseitige Lage der Zellen hinreichend versinnlichen. Fig. 309.

$$a, R, r = \alpha = \beta = \gamma = \delta = \alpha' = \beta' = \gamma' = \delta',$$
$$(a, R, r) = (\alpha) = (\beta) = (\gamma) = (\delta)$$
$$= (\alpha') = (\beta') = (\gamma') = (\delta'),$$

aher hat das Zeichen bei *gleichstellig 2endigen 2fach p-fliedrigen* einfachen Gestalten, wenn p eine gerade Zahl ist, kein Vorzeichen, welches eine Verschiedenheit der Flügelviertel erzeugte, und ist allgemein $= (a, R, r)$.

II. Beachtet man das Vorzeichen bei einem der 3 Strahlen, so kann dieses geschehen:

1) bei a; es sind dann verschieden die Flügelviertel $+a, R, r$ von $-a, R, r$ und die Flächen $(+a, R, r)$ von $(-a, R, r)$; jene gehören oberen, diese unteren Zellen an. Treten an einer zusammengesetzten Gestalt Begrenzungsflächen $(+a, R, r)$ allein auf, ohne dass die Flächen $(-a, R, r)$ zugleich vorhanden sind, oder umgekehrt diese ohne jene, so ist die Gestalt eine *ungleichendige* [152] *2fach pgliedrige*, wenn p, wie bisher, eine gerade Zahl ist;

2) bei R. Es sind dann die Flügelviertel

$$\alpha = \delta = \alpha' = \delta' = a, +R, r$$
$$\beta = \gamma = \beta' = \gamma' = a, -R, r$$

und eben so die Flächen

$$(\alpha) = (\delta) = (\alpha') = (\delta') = (a, +R, r)$$
$$(\beta) = (\gamma) = (\beta') = (\gamma') = (a, -R, r).$$

Eine Gestalt, welche von Flächen wie $(a, +R, r)$ (die man man sich so weit verlängert denkt, dass sie, wo möglich, für sich allein eine ringsum endlich begrenzte Gestalt einschliessen *)) begrenzt ist, ohne dass die Flächen $(a, -R, r)$ zugleich vorhanden wären (und umgekehrt $(a, -R, r)$ ohne $(a, +R, r)$), ist eine *gleichstellig 2endige 2fach mgliedrige*, wenn m eine ganze Zahl $= \frac{1}{2}p$ bedeutet, so dass m gerade oder ungerade sein kann. Das Zeichen $(a, +R, r)$ oder $(a, -R, r)$ dient daher vorzüglich, um gleichstellig 2endige 2fach m-gliedrige einfache Gestalten **) der 1sten oder 2ten Stellung zu bezeichnen, bei denen m eine *ungerade* Zahl ist. Die Strahlen r sind hier also in dem 2fach $m$gliedrigen Strahlensysteme nicht die Querstrahlen 2ter Art, sondern solche

*) Was für $p = 2$ nicht möglich ist.

**) Gewöhnlich also $2 \times m$flächige Ebenrandner.

Querstrahlen, welche den Winkel zwischen zwei nachbarlichen ungleichwerthigen 2fach 2gliedrigen halbiren, d. h. sie liegen in gleichstellig 2endigen 2fach 1gliedrigen Queraxen;

3) bei r. Die Unterschiede der Formen $(a, R, +r)$ und $(a, R, -r)$ sind ganz ähnlich denen zwischen $(a, +R, r)$ und $(a, -R, r)$.

III. Berücksichtigt man die Vorzeichen bei zwei von den drei Bestimmungsstrahlen, so kann hier auf zweierlei Weise verfahren werden.

A. Man setzt Zellen als gleichwerthig, wenn sie mit einander übereinstimmen hinsichtlich auf das + oder — Zeichen, welches dem Verhältnisse der beiden zu beachtenden Strahlen zukommen würde, nach der bekannten Regel, gemäss welcher gleiche Zeichen der Glieder des Verhältnisses für dieses Verhältniss selbst das Zeichen + bedingen, während ungleiche Vorzeichen der Glieder ebenso für das Verhältniss ein — Zeichen fordern. Dieses kann geschehen:

[153] 1) bei dem Hauptstrahle a und bei einem der Querstrahlen R oder r, z. B. bei R. Es ist dann

$$(\alpha) = (\delta) = (\beta') = (\gamma') = (\pm a, \pm R, r)$$

und

$$(\beta) = (\gamma) = (\alpha') = (\delta') = (\pm a, \mp R, r),$$

indem hier

$$+a : +R = -a : -R = +\frac{a}{R}$$

und wieder

$$+a : -R = -a : +R = -\frac{a}{R}.$$

Die Flächen $(\pm a, \pm R, r)$ für sich allein so weit verlängert gedacht, dass sie, wo möglich, eine ringsum endlich begrenzte Gestalt einschliessen, liefern eine *gerenstellig* 2*endige* 2*fach* *mgliedrige Gestalt* erster Stellung, während ebenso $(\pm a, \mp R, r)$ eine solche 2ter Stellung bedingen. Man sagt daher, eine gerenstellig 2endige 2fach $m$gliedrige Gestalt sei eine flächenhalbzählige (hemiedrische) gleichstellig 2endige 2fach $p$gliedrige. Die Strahlen R sind hier die 2fach 1gliedrigen und die Strahlen r die 1fach 2gliedrigen Querstrahlen des gerenstellig 2endigen 2fach $m$gliedrigen Strahlensystems*);

*) Aehnlich sind die Ergebnisse bei Beachtung der Vorzeichen von a und r.

2) bei den 2 Querstrahlen R und r. Es ist dann

$$(\alpha) = (\gamma) = (\alpha') = (\gamma') = (a, \pm R, \pm r)$$
$$(\beta) = (\delta) = (\beta') = (\delta') = (a, \mp R, \pm r).$$

Die gleichstellig 2endige 2fach $p$gliedrige Gestalt (a, R, r) wird hier zerlegt in 2 einzelne *gleichstellig 2endige 1fach pgliedrige Gestalten*, deren erste durch genugsame Verlängerung der Flächen $(a, \pm R, \pm r)$ entsteht, während die zweite ebenso durch $(a, \mp R, \pm r)$ sich bezeichnen lässt.

B. Man fordert, dass Flügelviertel, welche als gleichwerthig betrachtet werden sollen, mit einander übereinstimmen sowohl rücksichtlich auf das Vorzeichen bei R, als auch auf jenes bei r, ohne dass hier auf das Vorzeichen des Verhältnisses der beiden zu beachtenden Strahlen gesehen wird.

1) Die beiden mit Vorzeichen versehenen Strahlen seien der Hauptstrahl a und ein Querstrahl R oder r z. B. R, so ist:

$$(\alpha) = (\delta) = (+a, +R, r)$$
$$(\beta) = (\gamma) = (+a, -R, r)$$
$$(\alpha') = (\delta') = (-a, +R, r)$$
$$(\beta') = (\gamma') = (-a, -R, r).$$

[154] Es wird hier (a, R, r) zerlegt in 4 einzelne *ungleichendige 2fach mgliedrige Gestaltenbezeichnungen*, denen eine der vier so eben aufgestellten Formen eigen ist, und sie dienen vorzüglich für solche ungleichendige 2fach $m$gliedrige einfache Gestalten, deren m ungerade ist.

2) Die hinsichtlich auf ihr Vorzeichen zu betrachtenden Strahlen seien die beiden Querstrahlen R und r, so ist

$$(\alpha) = (\alpha') = (a, +R, +r)$$
$$(\beta) = (\beta') = (a, -R, +r)$$
$$(\gamma) = (\gamma') = (a, -R, -r)$$
$$(\delta) = (\delta') = (a, +R, -r).$$

Jede dieser vier Bezeichnungen dient zur Bestimmung einer *gleichstellig 2endigen 1fach mgliedrigen Gestalt*, und zunächst einer solchen, bei welcher m ungerade ist.

IV. Nimmt man Rücksicht auf die Vorzeichen bei allen 3 Bestimmungsstrahlen a, R und r, so sind folgende Fälle möglich:

A. Man fordert, dass Zellen, welche als gleichwerthig

betrachtet werden sollen, sich gleich sind in Beziehung auf die Vorzeichen der Verhältnisse des Hauptstrahls zu jedem der beiden Querstrahlen, so dass

$$+a : +R = -a : -R = +\frac{a}{R}$$

$$+a : -R = -a : +R = -\frac{a}{R}$$

gedacht wird; solche Flügelviertel stimmen denn auch miteinander überein hinsichtlich auf das Vorzeichen, welches dem Verhältnisse $R : r$ gebührt. Es ist dann:

$$(\alpha) = (\gamma') = (\pm a, \pm R, \pm r)^{*})$$
$$(\beta) = (\delta') = (\pm a, \mp R, \pm r)^{**})$$
$$(\gamma) = (\alpha') = (\pm a, \mp R, \mp r)^{***})$$
$$(\delta) = (\beta') = (\pm a, \pm R, \mp r)^{***}).$$

Flächen, die einem dieser vier Zeichen entsprechen, begrenzen bei hinreichender Verlängerung *gerenstellig* 2*endige* 1*fach* *m gliedrige* [**155**] *Gestalten*, und diese Zeichen dienen daher zur Bestimmung solcher Formen, wobei m sowohl gerade als auch ungerade ist.

B. Man fordert, dass gleichwerthige Flügelviertel mit einander übereinstimmen rücksichtlich auf das Vorzeichen, welches dem Verhältnisse des Hauptstrahls a zu dem Verhältnisse der beiden Querstrahlen $\frac{R}{r}$ gebührt, nach der bekannten Regel, gemäss welcher $+a : +\frac{R}{r} = -a : -\frac{R}{r}$ und $+a : -\frac{R}{r} = -a : +\frac{R}{r}$, so dass, wenn in dem Ausdrucke a, R, r eine gerade Anzahl von — Zeichen (0 oder 2) vorkommt, das ganze Verhältniss ein positives wird, während es bei ungerader Anzahl von — Zeichen (1 oder 3) negativ sein muss. Es ist dann

---

*) Es ist nämlich hier $+a : +R = -a : -R$ und $+a : +r = -a : -r$ und zugleich auch $+R : +r = -R : -r$.

**) $+a : -R = -a : +R$ und $+a : +r = -a : -r$ und auch $-R : +r = +R : -r$.

***) In den beiden letzten Zeichen wiederholen sich dieselben Verhältnisse, wie in den beiden ersten Fällen, nur in anderer Verbindung.

$$(\alpha) = (\gamma) = (\beta') = (\delta') = + (a, R, r)$$
$$(\beta) = (\delta) = (\alpha') = (\gamma') = - (a, R, r)\,.$$

Die beiden Zeichen $+ (a, R, r)$ und $- (a, R, r)$ beziehen sich auf die beiden *ebenbildlich* 2*endigen* 1*fach p gliedrigen Gestalten*, welche sich aus jeder gleichstellig 2endigen 2fach $p$gliedrigen Gestalt durch Verlängerung der einen oder der andern Hälfte ihrer Flächen entwickeln lassen.

C. Man setzt Flügelviertel nur dann als gleichwerthig, wenn sie einander gleich sind in Beziehung auf das Vorzeichen, welches dem Verhältnisse zweier Strahlen zusteht, und in Beziehung auf das Vorzeichen, welches dem 3ten Strahle eigen ist. Der auf solche Weise einzeln zu betrachtende Strahl kann sein entweder der Hauptstrahl a, oder einer der Querstrahlen R oder r, z. B. r.

1) Ist a der einzeln zu berücksichtigende Strahl, so ist

$$(\alpha) = (\gamma) = (+a, \pm R, \pm r)^{*})$$
$$(\beta) = (\delta) = (+a, \mp R, \pm r)$$
$$(\alpha') = (\gamma') = (-a, \pm R, \pm r)$$
$$(\beta') = (\delta') = (-a, \mp R, \pm r)\,.$$

Es sind dieses die allgemeinen Formen für die Bezeichnung *ungleichendiger* 1*fach p gliedriger einfacher Gestalten.*

2) Ist r der einzeln zu berücksichtigende Strahl, so hat man

[156]
$$(\alpha) = (\beta') = (\pm a, \pm R, + r)$$
$$(\beta) = (\alpha') = (\pm a, \mp R, + r)$$
$$(\gamma) = (\delta') = (\pm a, \mp R, - r)$$
$$(\delta) = (\gamma') = (\pm a, \pm R, - r)^{**})\,.$$

Flächen, die *einem* solchen Zeichen entsprechen, begrenzen eine *ebenbildlich* 2*endige* 1*fach m gliedrige einfache Gestalt.* Diese Bezeichnung ist vorzüglich wichtig für den Fall, wobei m eine ungerade Zahl ist.

---

*) d. h. $(+a, +R, +r) = (+a, -R, -r)$.

**) Diesem Ergebnisse ähnlich würde sein:

$$(\alpha) = (\delta') = (\pm a, + R, \pm r)$$
$$(\beta) = (\gamma') = (\pm a, - R, \pm r)$$
$$(\gamma) = (\beta') = (\pm a, - R, \mp r)$$
$$(\delta) = (\alpha') = (\pm a, + R, \mp r),$$

wenn R der einzeln rücksichtlich auf seine Vorzeichen zu beachtende Bestimmungsstrahl wäre.

D. Man hält Zellen nur dann für gleichwerthig, wenn sie einander gleich sind in Beziehung auf das Vorzeichen eines jeden der drei Bestimmungsstrahlen. Es ist dann

$(\alpha) = (+a, +R, +r)$	$(\alpha') = (-a, +R, +r)$
$(\beta) = (+a, -R, +r)$	$(\beta') = (-a, -R, +r)$
$(\gamma) = (+a, -R, -r)$	$(\gamma') = (-a, -R, -r)$
$(\delta) = (+a, +R, -r)$	$(\delta') = (-a, +R, -r)$.

Gestalten, die bloss von den Flächen begrenzt sind, welche einem dieser 8 Zeichen entsprechen, sind *ungleichendige 1fach mgliedrige*, eine vorzüglich dann zu gebrauchende Bezeichnung, wenn *m* eine ungerade Zahl ist.

Wenn man demnach von einem Axenkreuze ausgeht, bestehend aus den drei wichtigsten Arten von Axen, nämlich einer Hauptaxe und *m* Queraxen erster und *m* Queraxen zweiter Art, und man bezeichnet in Beziehung auf dasselbe die Gestalten der verschiedenen Systeme, denen dieses Axenkreuz zum Grunde liegt, so sieht man, dass die einen nur die halbe Anzahl der Flächen besitzen, welche diesem Axenkreuze möglicher Weise entsprechen können, andere nur den vierten und noch andere bloss den achten Theil dieser Anzahl. Man kann daher auch mittelst der Bezeichnung die sämmtlichen Gestalten, bei denen ausser der Hauptaxe *m* Queraxen 1ster und folglich auch *m* Queraxen 2ter Art als Maasslinien dienen, zusammenfassen unter dem allgemeinen Ausdrucke *1- und mmaassige Gestalten* (z. B. 1- und 3maassige [157] Gestalt, *forma monocaetrimetrica*, 1- und 2maassige, *forma monocaedimetrica*, 1- und 1maassige, *forma monocaemonometrica*, u. s. w.); damit jedoch der auf dem Wege der Bezeichnung gewonnene Begriff der 1- und *m*maassigen Gestalten vollkommen mit dem rein geometrischen bereits oben entwickelten übereinstimme, muss auch hier festgesetzt werden, dass als Messungsqueraxen von einerlei Art nur solche betrachtet werden dürfen, welche auch in der nicht vollzähligflächigen Gestalt sich als *gleichwerthig* verhalten; dann werden, wenn *m gerade* ist, die gleichstellig 2endigen 1fach und 2fach *m*gliedrigen, so wie die ebenbildlich gleichendigen 1fach *m*gliedrigen und wieder die ungleichendigen 1fach und 2fach *m*gliedrigen Gestalten nicht zu den 1- und *m*maassigen gehören, wohl aber wenn *m ungerade* ist.

Es ist dann z. B. jede 1- und 3maassige Gestalt entweder

	Zeichen der einfachen Gestalten.
1) eine flächenvollzählige (*forma monocaetrimetrica holoedrica*); sie ist eine gleichstellig 2endige 2fach 6gliedrige .	(a, R, r)
2) eine flächenhalbzählige (*f. m. hemiedrica*). Diese ist	
a) gleichstellig 2endig 1fach 6gliedrig .	$(a, \pm R, \pm r)$ $(a, \pm R, \mp r)$
b) gleichstellig 2endig 2fach 3gliedrig .	$(a, +R, r)$ $(a, -R, r)$
c) gerenstellig 2endig 2fach 3gliedrig .	$(\pm a, \pm R, r)$ $(\pm a, \mp R, r)$
d) ebenbildlich 2endig 1fach 6gliedrig .	$+(a, R, r)$ $-(a, R, r)$
e) ungleichendig 2fach 6gliedrig . . .	$(+a, R, r)$ $(-a, R, r)$
3) eine flächenviertelszählige (*f. m. tetartoedrica*), und zwar	
a) gleichstellig 2endig 1fach 3gliedrig .	$(a, +R, +r)$ $(a, -R, -r)$ $(a, -R, +r)$ $(a, +R, -r)$
b) gerenstellig 2endig 1fach 3gliedrig .	$(\pm a, \pm R, \pm r)$ $(\pm a, \mp R, \pm r)$ $(\pm a, \mp R, \mp r)$ $(\pm a, \pm R, \mp r)$
[158] c) ebenbildlich 2endig 1fach 3gliedrig .	$(\pm a, +R, \pm r)$ $(\pm a, -R, \pm r)$ $(\pm a, -R, \mp r)$ $(\pm a, +R, \mp r)$
d) ungleichendig 1fach 6gliedrig . .	$(+a, \pm R, \pm r)$ $(+a, \pm R, \mp r)$ $(-a, \pm R, \pm r)$ $(-a, \pm R, \mp r)$
4) eine flächenachtelszählige (*f. m. hemitetartoedrica*); sie ist	
ungleichendig 1fach 3gliedrig	$(+a, +R, +r)$ $(+a, -R, +r)$ $(+a, -R, -r)$ $(+a, +R, -r)$ $(-a, +R, +r)$ $(-a, -R, +r)$ $(-a, -R, -r)$ $(-a, +R, -r)$.

Was von den 1- und 3maassigen Gestalten gesagt worden ist, gilt von den 1- und *m*maassigen, wenn man statt 3 die Zahl *m* und statt 6 die Zahl $p = 2m$ setzt, so lange *m* *ungerade* ist; ist aber *m* *gerade*, so fallen die Abtheilungen 2a), 3a), 3c) und 4) hinweg, indem sie, wenn $m = 2n$ ist, bloss 1- und *n*maassige Gestalten enthalten. Fordert man aber bloss, dass Gestalten, welche man 1- und *m*maassige nennt, *m* gleichwerthige Messungsqueraxen *einer* Art haben müssen, welche sich unter Winkeln von $\frac{360}{m}$ Graden schneiden, ohne zu fordern, dass auch die Quermaasslinien, welche zwischen diesen liegen, den Winkel von $\frac{360}{m}$ Graden halbirend (die Messungsqueraxen zweiter Art), einander gleichwerthige Queraxen seien, so fällt *dieser* Unterschied zwischen der Reihe der 1- und *m*maassigen Gestalten, der durch einen geraden oder ungeraden Werth von *m* bedingt wird, hinweg.

Man sieht leicht ein, dass die Bezeichnung durch die drei wichtigsten Axenarten bei solchen 1- und 1maassigen Gestalten, welche mehr als 3 Arten einheitlicher Axen besitzen, nicht gerade nothwendig durch 3 gegen einander senkrechte Axen geschehen muss und dass man, ohne dass die Art der Anwendung [159] der Vorzeichen sich ändert, in einem solchen Falle je 3 nicht in einerlei Ebene liegende Axen bei der Bezeichnung zum Grunde legen kann, wenn nur in der Gestalt keine andern Axen vorhanden sind, denen eine höhere Wichtigkeit zusteht. So also wird man z. B. bei den gerenstellig 2endigen 2fach 1gliedrigen oder bei den gleichstellig 2endigen 1fach 2gliedrigen Gestalten die 2gliedrige Axe und irgend zwei (der unendlich vielen auf diese senkrechten) einander unter beliebigem Winkel schneidende 2fach 1gliedrige Axen als die drei wichtigsten Axen betrachten können, eben weil hier jede der 2fach 1gliedrigen Axen eine *einheitliche* Axe ist, welche eben so gut wie jede andere vorhandene einheitliche Axe gewählt zu werden fähig ist, um aus ihrem Charakter (einer gerenstellig 2endigen 2fach 1gliedrigen Axe) die Beschaffenheit jeder andern Axe des ganzen Axensystems zu entwickeln *). Aus demselben Grunde kann bei gerenstellig

*) Dasselbe gilt mit der gehörigen Veränderung für alle gleichstellig 2endigen 1fach *p*gliedrigen Gestalten, in denen *p* eine gerade Zahl ist; auch hier können je *p* Queraxen einer *beliebigen* 2ten Art nebst der Hauptaxe als vorzüglich wichtige Axen gelten.

2endigen 1fach 1gliedrigen Gestalten jede Verbindung dreier unter beliebigen Winkeln sich schneidenden, nicht in einerlei Ebene liegenden Axen zur Bezeichnung gebraucht werden, weil hier jede denkbare Axe eine einheitliche Axe ist. Man wird jedoch von einer solchen Bezeichnung durch unregelmässige Zellen nur dann Gebrauch machen, wenn besondere Gründe dieses fordern.

Abgekürzte Bezeichnung hauptaxiger einfacher Gestalten.

Wenn es sich bloss von den wichtigsten Gestaltenarten handelt, nämlich von jenen, für welche keiner der Werthe von a', R', r' die Grenzen zwischen 0 und ∞ überschreitet, d. h. wenn kein solcher Werth negativ ist*) und wenn namentlich die Grösse [160] der einfachen Gestalt unberücksichtigt bleiben darf, so kann jedesmal $(a : R : r)$ umgewandelt werden in $\left(\frac{a}{R} : 1 : \frac{r}{R}\right)$ oder in $(z : 1 : y)$, so dass, wenn der Strahl R als Einheit betrachtet wird, z den Hauptstrahl a und y den Querstrahl r bedeutet. Es kann dann für die flächenvollzähligen Gestalten das Zeichen $z \mid y$ die Stelle von $(z : 1 : y)$ vertreten. Man erhält nämlich

1) für die $2 \times \nu$ flächigen Ebenrandner statt $(a : R : r)$
hier $(z : 1 : y)$, also . . . . $(z \mid y)$**)

2) für die ν flächigen Ebenrandner
1ster Stellung $\left(z : 1 : \frac{1}{y}\right)$ . . . . $\left(z \mid \frac{1}{q}\right)$***)
2ter Stellung $(z : 1 : y)$ . . . . $(z \mid q)$

*) Oder wenn von den flächenvollzähligen 1- und n maassigen einfachen Gestalten ausser den ringsum endlich begrenzten nur solche betrachtet werden sollen, welche 1) Säulen oder $2 \times p$ flächige Gegenseitenwandner, 2) ν fach quersäulige $2 \times \nu$ flächige Schiefwandner welche bekanntlich für das 1- und 1 maassige Axenkreuz zu 4 flächigen quersäuligen Schiefwandnern werden und 3) 2 flächige Tafeln sind, [160] während von den flächenhalbzähligen u. s. w. Gestalten auch nur die diesen Fällen entsprechenden einfachen Gestalten berücksichtigt werden.

**) Wenn $y > 1$, so hat jede Gestalt die 1ste Stellung, wenn $y < 1$, die 2te.

***) $q = \cos\frac{180^\circ}{2\nu}$, wie früher. Für $\nu = 2$ ist $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ zu setzen

3) für die $2 \times p$ flächige Säule $(\infty : 1 : y)$. . . $(\infty \mid y)$

4) für die p flächige Säule

1ster Stellung $\left(\infty : 1 : \frac{1}{q}\right)$ . . . . $\left(\infty \mid \frac{1}{q}\right)$

2ter Stellung $(\infty : 1 : q)$ . . . . $(\infty \mid q)$

5) für die $2 \times t$ flächigen p fach quersäuligen Schiefwandner 1ster Stellung $(z : 1 : \infty)$ . . $(z \mid \infty)$

2ter Stellung $(z : \infty : y)$, hier $\left(\frac{1}{\infty} z : 1 : \frac{1}{\infty} y\right) \cdot\cdot \left(\frac{1}{\infty} z \mid \frac{1}{\infty} y\right)$

6) für die $2 \times p$ flächigen Gegenseitenwandner

1ster Stellung $(\infty : 1 : \infty)$ . . . . $(\infty \mid \infty)$

2ter Stellung $(\infty z : \infty : y)$, hier $\left(z : 1 : \frac{1}{\infty} y\right) \cdot\cdot \left(z \mid \frac{1}{\infty} y\right)$

7) für die Tafelflächner

$(z : \infty : \infty y)$, hier $\left(\frac{1}{\infty} z : 1 : y\right)$ . . . . . $\left(\frac{1}{\infty} z \mid y\right)$.

Die Vorzeichen + und —, durch welche die verschiedenen 1- und m maassigen Gestalten unterschieden werden, welche nur [161] die Hälfte oder den vierten oder den achten Theil der Flächen besitzen, die den flächenvollzähligen Gestalten dieser Art eigen sind, können hier natürlich bloss in Beziehung auf den Hauptstrahl z oder a und den Querstrahl y oder r berücksichtigt werden. Man erhält hierdurch Gestalten, in Beziehung auf welche sich diejenigen, welche von dem Vorzeichen bei R mit abhängen, als flächenhalbzählige verhalten, und es können die Verschiedenheiten, die von + oder — bei R herrühren, dadurch angedeutet werden, dass in dem Zeichen $z \mid y$ der Zwischenstrich | eine der folgenden Gestalten erhält: ‾▌_ _▌‾] [.

Stellt nämlich die erste der nebenstehenden Figuren die beiden Flügelviertel α und α' dar, im Durchschnitte senkrecht auf r, vom Mittelpunkte des Strahlensystems aus gesehen, so ist α für den obern Hauptstrahl ein linkes und α' für den untern Hauptstrahl ein rechtes Flügelviertel. Das Zeichen ‾▌_ bedeute linkes, das Zeichen _▌‾ aber rechtes Flügelviertel für den Hauptstrahl a, welcher dem Flügelviertel angehört, so

α | | β
α' | | β'
γ | | δ
γ' | | δ'

---

und daher in diesem Falle $z \mid \frac{1}{q} = z \mid \infty$, $z \mid q = z \mid \frac{1}{\infty} y$,
$\infty \mid \frac{1}{q} = \infty \mid \infty$, $\infty \mid q = \infty \mid \frac{1}{\infty}$, hier $= z \mid \frac{1}{\infty} y$.

ist, wie aus der Betrachtung der nebenstehenden Figuren erhellet,

$$(\alpha) = +z\,\rceil_{-} + y \qquad (\alpha') = -z\,{}_{-}|^{-} + y$$
$$(\beta) = +z\,{}_{-}|^{-} + y \qquad (\beta') = -z\,{}^{-}\lfloor + y$$
$$(\gamma) = +z\,{}^{-}\lfloor - y \qquad (\gamma') = -z\,{}_{-}\lceil - y$$
$$(\delta) = +z\,{}_{-}\lceil - y \qquad (\delta') = -z\,{}^{-}|_{-} - y.$$

Man hat hierdurch die Bezeichnungen für die *ungleichendigen* 1*fach* *m*g*liedrigen* 1- und *m*m*aassigen Gestalten.*

Wenn $(\alpha) = (\beta)$ ist, so ist $+z\,\rceil_{-} + y$ und $+z\,{}_{-}|^{-} + y$ zu vereinigen in $+z \mid +y$; man erhält auf solche Weise bei den *ungleichendigen* 2fach *m*gliedrigen Gestalten*)

$$\text{für } (\alpha) = (\beta) \text{ das Zeichen } +z \mid +y$$
$$(\gamma) = (\delta) \quad - \quad - \quad +z \mid -y$$
$$(\alpha') = (\beta') \quad - \quad - \quad -z \mid +y$$
$$(\gamma') = (\delta') \quad - \quad - \quad -z \mid -y,$$

und daher auch bei den ungleichendigen 2fach *p*gliedrigen Gestalten

$$(\alpha) = (\beta) = (\gamma) = (\delta) = +z \mid y$$
$$(\alpha') = (\beta') = (\gamma') = (\delta') = -z \mid y.$$

[162] Ist

$$(\alpha) = (\beta') \text{ so hat man } z\,{}^{-}\lfloor + y$$
$$(\beta) = (\alpha') \quad - \quad - \quad - \quad z\,\rfloor^{-} + y$$
$$(\gamma) = (\delta') \quad - \quad - \quad - \quad z\,{}^{-}\lfloor - y$$
$$(\delta) = (\gamma') \quad - \quad - \quad - \quad z\,{}_{-}\lceil - y.$$

Ist ebenso

$$(\alpha) = (\delta') \text{ so hat man } \pm z\,|_{-} \pm y$$
$$(\beta) = (\gamma') \quad - \quad - \quad - \quad \pm z\,{}_{-}| \pm y$$
$$(\gamma) = (\beta') \quad - \quad - \quad - \quad \pm z\,{}^{-}\lfloor \mp y$$
$$(\delta) = (\alpha') \quad - \quad - \quad - \quad \pm z\,{}_{-}|^{-} \mp y.$$

Beide Bezeichnungen sind gültig für *ebenbildlich* 2*endige* 1*fach* *m*g*liedrige* 1- und *m*maassige *Gestalten*, je nachdem

---

*) Der Fall, wobei $(\alpha) = (\delta)$ und $(\gamma) = (\beta)$ und $(\alpha') = (\delta')$ und $(\gamma') = (\beta')$ ist, lässt sich auf diesen hier dadurch reduciren, dass man R mit r vertauscht, also dasjenige r nennt, was durch R bezeichnet ist, und umgekehrt.

sie als flächenhalbzählige betrachtet werden von den *gleichstellig* 2*endigen* 2fach *m*gliedrigen*), für welche

$$(\alpha) = (\beta') = (\beta) = (\alpha') = z \mid + y$$
$$(\gamma) = (\delta') = (\delta) = (\gamma') = z \mid - y\,,$$

oder als flächenhalbzählige Gestalten von den *gerenstellig* 2*endigen* 2*fach m gliedrigen*, für welche

$$(\alpha) = (\delta') = (\beta) = (\gamma') = \pm z \mid \pm y$$
$$(\gamma) = (\beta') = (\delta) = (\alpha') = \pm z \mid \mp y.$$

Für den Fall, wobei $(\alpha) = (\alpha')$ gesetzt werden muss, dient das Zeichen**) $]$, um anzudeuten, dass ein in Beziehung zum obern Ende der Hauptaxe linkes Flügelviertel und ein in Beziehung zum untern Ende der Hauptaxe sich als rechtes verhaltendes als gleichwerthig gesetzt seien. Für $(\beta) = (\beta')$ hat man das entgegengesetzte Zeichen $[$. Es ist daher für die *gleichstellig* 2*endigen* 1*fach m gliedrigen Gestalten*

$$(\alpha) = (\alpha') = z \;]\; + y$$
$$(\beta) = (\beta') = z \;[\; + y$$
$$(\gamma) = (\gamma') = z \;]\; - y$$
$$(\delta) = (\delta') = z \;[\; - y,$$

und daher auch für die *gleichstellig* 2*endigen* 1*fach p gliedrigen* 1- und *m*maassigen *Gestalten*

[163] $$(\alpha) = (\alpha') = (\gamma) = (\gamma') = z \;]\; y$$
$$(\beta) = (\beta') = (\delta) = (\delta') = z \;[\; y.$$

Wenn $(\alpha) = (\gamma)$ ist, so wird $+z\,{}^{-}\|_{-} + y$ und $+z\,{}^{-}\|_{-} - y$ verbunden in $+z\,{}^{-}\|_{-}\, y$; man hat daher für die *ungleichendigen* 1*fach p gliedrigen Gestalten*

$$(\alpha) = (\gamma) = + z\,{}^{-}\|_{-}\, y$$
$$(\beta) = (\delta) = + z\,{}_{-}\|^{-}\, y$$
$$(\alpha') = (\gamma') = - z\,{}_{-}\|^{-}\, y$$
$$(\beta') = (\delta') = - z\,{}^{-}\|_{-}\, y.$$

---

*) Wäre $(\alpha) = (\delta) = (\alpha') = (\delta')$ und $(\beta) = (\gamma) = (\beta') = (\gamma')$, so nenne man *r*, was mit *R* bezeichnet ist, und umgekehrt *R*, was *r* heisst, und man hat dann die Bezeichnung für diesen Fall.

**) Gewissermaassen eine Verbindung von ${}^{-}_{-}\|\text{-}$, so wie $[$ eine Verbindung von $\text{-}\|^{-}_{-}$.

Wenn $(\alpha) = (\gamma')$ ist, so ist zu verbinden $+z \,\rceil\!\lfloor\, +y$ mit $-z \,\lfloor\!\lceil\, -y$, d. h. ein für den oberen Hauptstrahl als links sich verhaltendes mit einem für den unteren Hauptstrahl als rechts zu betrachtenden Flächenzeichen, daher $\pm z \,]\, \pm y$ statt $\left\{\begin{matrix} +z \,\rceil\!\lfloor\, +y \\ -z \,\lfloor\!\lceil\, -y \end{matrix}\right\}$.

Es ist daher für die *gerenstellig* 2*endigen* 1*fach mgliedrigen Gestalten*

$$\begin{aligned}(\alpha) &= (\gamma') = \pm z \,]\, \pm y \\ (\beta) &= (\delta') = \pm z \,[\, \pm y \\ (\gamma) &= (\alpha') = \pm z \,]\, \mp y \\ (\delta) &= (\beta') = \pm z \,[\, \mp y.\end{aligned}$$

Ist endlich $(\alpha) = (\beta) = (\gamma) = (\delta) = (\alpha') = (\beta') = (\gamma') = (\delta')$, so ist das Zeichen für die flächenvollzähligen 1- und *m*-maassigen, d. h. für die gleichstellig 2endigen 2fach *p*gliedrigen Gestalten $= z \mid y$.

IX. Bezeichnung der einfachen hauptaxenlosen Gestalten und ihrer Flächen.

Was die hauptaxenlosen Gestalten anlangt, so werden auch diese am ungekünsteltsten durch Angabe der Strahlen der 3 wichtigsten Arten von Axen derselben bestimmt.

Bei der allgemeinsten Gestalt im 8strahligen Systeme, dem 48wandigen Dreieckflächner, genügt die Angabe eines 4gliedrigen Strahles *a*, eines 2gliedrigen *R* und eines 3gliedrigen Strahles *r*.

[**164**] Das Zeichen (a, R, r) ist*)

*) Gestalten des 2fach 3gliedrig 8strahligen Systems, bei denen einer oder zwei von den 3 Strahlen *a*, *R* und *r* unendlich oder null- oder negativwerthig sind, müssen *hier* von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben. Die derartigen — Zeichen sind auch hier wieder mit dem Strahle, welchen sie betreffen, im Zeichen der Gestalt in Klammern ( ) einzuschliessen [z. B. $(-a, (-R), r)$], um von den — Zeichen, die sich auf den Charakter der Strahlenpermutationen beziehen, unterschieden zu werden.

beim		oder	oder
8flächner . . .	$(1,\ \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \frac{1}{3}\sqrt{3})$	$(1,\ \sqrt{\frac{1}{2}},\ \sqrt{\frac{1}{3}})$	$(\sqrt{3},\ \sqrt{\frac{3}{2}},\ 1)$
Würfel	$(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$	$(1,\ 2\sqrt{\frac{1}{2}},\ 3\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(\frac{1}{3}\sqrt{3},\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}},\ 1)$
12-Rautenflächner . . .	$(1,\ \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{3})$	$(1,\ \sqrt{\frac{1}{2}},\ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(\frac{2}{3}\sqrt{3},\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}},\ 1)$
8×3wandigen Keilflächner	$(1,\ \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \varrho\sqrt{3})$	$(1,\ \sqrt{\frac{1}{2}},\ \mathfrak{z}\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(x\sqrt{3},\ x\sqrt{\frac{3}{2}},\ 1)$
6×4wandigen Keilflächner	$(1,\ \psi\sqrt{2},\ \psi\sqrt{3})$	$(1,\ \mathfrak{y}\sqrt{\frac{1}{2}},\ \frac{3}{2}\mathfrak{y}\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(x\sqrt{3},\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}},\ 1)$
24wand. Lanzenflächner .	$\left(1, \psi\sqrt{2}, \frac{\psi}{2-\psi}\sqrt{3}\right)$	$\left(1, \mathfrak{y}\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{3\mathfrak{y}}{4-\mathfrak{y}}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	$\left(x\sqrt{3}, \frac{4x}{3x+1}\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$
48wand. Dreieckflächner .	$(1,\ \psi\sqrt{2},\ \varrho\sqrt{3})$	$(1,\ \mathfrak{y}\sqrt{\frac{1}{2}},\ \mathfrak{z}\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(x\sqrt{3},\ y\sqrt{\frac{3}{2}},\ 1)$.

Jede Begrenzungsebene des 48wandigen Dreieckflächners befindet sich in einer Zelle, für welche, wenn man sie als eine Ecke betrachtet, ein 4gliedriger Strahl a, ein 3gliedriger r und ein 2gliedriger Strahl R als Kantenlinien erscheinen, während ihre 3 Winkel bestimmt werden durch

$$\begin{aligned} &\text{Tg. } m = 1, && \text{also } m = 45^{\circ} \\ &\text{Tg. } n = \sqrt{2} && \ \text{-}\ \ n = 54^{\circ}\,44' \ldots \\ &\text{Tg. } l = \sqrt{\tfrac{1}{2}} && \ \text{-}\ \ l = 35^{\circ}\,16' \ldots, \end{aligned}$$

wenn m der Winkel von a gegen R und n der Winkel von a gegen r und l der Winkel von r gegen R ist. Bezeichnet man auch hier wieder die Bestimmungsstrahlen einer und derselben Art, um sie von einander unterscheiden zu können, mit Nummern, so hat man für a

a	a	a	a	a	a
1	2	3	4	5	6,

für R

R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12,

für r

r	r	r	r	r	r	r	r
1	2	3	4	5	6	7	8;

[165] und es lassen sich dann die einzelnen Zellen wieder unterscheiden, z. B. $\underset{1}{a}, \underset{1}{R}, \underset{1}{r}$ oder $\underset{1}{a}, \underset{2}{R}, \underset{1}{r}$ u. s. w.

Fig. 313. Die Abbildung stellt einen Würfel dar, in welchem die 6 Strahlen *a* durch Linien wie ——·——·, die 12 Strahlen *R* durch Linien wie —··——··——··, die 8 Strahlen *r* durch solche wie —·—·—· unterschieden sind. Jeder solcher Strahl ist an seinem Ende mit dem ihm beigelegten Namen $R_1, R_2, R_3 \dots a_1, a_2, a_3 \dots r_1, r_2, r_3 \dots$ versehen. Die Numerirung der Strahlen *einer* Art ist als eine willkürlich gewählte zu betrachten. Statt des Würfels könnte jede andere ringsum geschlossene 2fach 3gliedrig 8strahlige Gestalt, z. B. ein 48wandiger Dreieckflächner, gesetzt werden, indem hier bloss der Zweck ist, die sämmtlichen Bestimmungsstrahlen in ihren gegenseitigen Lagenverhältnissen darzustellen.

Setzt man nun: es sei für die Zelle $a_1 R_1 r_1$ jeder der 3 Strahlen positiv, so muss die Permutation der Strahlen *a* sowohl und die der Strahlen *R*, als auch jene der Strahlen *r* (welche z. B. entsteht, wenn man einen 1fach 1gliedrigen, in der Zelle $a_1 R_1 r_1$ befindlichen, Strahl *x* senkrecht aufwärts richtet und dann die Strahlen einer Art in der Ordnung aufzählt, in welcher sie mit dem Strahle *x* mehr und mehr divergiren, so dass der stärker divergirende nach dem minder divergirenden folgt) als eine positive gesetzt werden.

Man erhält die Permutation der Strahlen *a*, welche das + oder — Zeichen des Strahles *a* einer andern Zelle z. B. $a_1 R_2 r_1$ bestimmt, wenn man den dem Strahle *x* in $a_1 R_1 r_1$ gleichwerthigen Strahl ξ in der Zelle $a_1 R_2 r_1$ senkrecht stellt und dann die Strahlen *a* in der Ordnung aufzählt, gemäss welcher jeder folgende mit dem Strahle ξ mehr divergirt, als der vorhergehende. Auf ähnliche Weise wird die Permutation der Strahlen *R* oder *r* gefunden, welche für den Strahl *R* oder *r* das in dieser oder jener Zelle gültige + oder — Zeichen bestimmt. Es ist jedoch nicht gerade nothwendig, dass man zur Bestimmung des + oder [166] — Zeichens *für R* in einer Zelle denselben Strahl *x* senkrecht aufwärts gerichtet stelle, welcher bei der Bestimmung des + oder — Zeichens *für a* in dieser Zelle gedient hat, nur muss für jeden Strahl *R* (oder *r*) in *jeder* Zelle so verfahren werden,

wie in der Zelle $\underset{1\,1\,1}{aRr}$ mit R (oder r) der Anfang gemacht worden ist. Das + oder — Zeichen, welches einer jeden Permutation zukommt, wird auf die früher angegebene Weise aufgefunden und dem Strahle a oder R oder r der fraglichen Zelle, welcher als Stellvertreter dieser Permutation angesehen wird, beigelegt. Es entspricht sonach

in der Zelle	der Strahl a der Permutation	der Strahl R der Permutation	der Strahl r der Permutation
aRr	$a\,a\,a\,a\,a\,a$	$R\,R\,R\,R\,R\,R\,R\,R\,R\,R\,R\,R$	$r\,r\,r\,r\,r\,r\,r\,r$
1 1 1	+ 1 4 6 5 3 2	+ 1 2 5 3 4 6 7 10 9 11 8 12	+ 1 4 2 3 5 8 6 7
aRr			
1 2 1	+ 1 6 4 3 5 2	— 2 1 6 3 10 5 11 4 9 7 12 8	+ 1 2 4 3 5 6 8 7
4 1 1	+ 4 1 6 5 2 3	— 1 3 4 2 5 7 6 11 8 10 9 12	+ 1 4 5 8 2 3 6 7
1 1 4	— 1 4 5 6 3 2	+ 1 5 2 4 3 6 7 9 10 8 11 12	+ 4 1 3 2 8 5 7 6
4 1 4	— 4 1 5 6 2 3	— 1 4 3 5 2 7 6 8 11 9 10 12	+ 4 1 8 5 3 2 7 6.

Es ist nicht nöthig, auch die übrigen Permutationen aufzustellen, da aus den hier bereits angegebenen erhellet:

1) dass für je 2 Zellen (wie $\underset{1\,1\,1}{aRr}$ und $\underset{1\,2\,1}{aRr}$), welche einen 4gliedrigen und einen 3gliedrigen Strahl gemeinschaftlich haben, der 4gliedrige Strahl sowohl als auch der 3gliedrige in *beiden gleiche* Vorzeichen hat, während dem 2gliedrigen Strahle der einen ein — Zeichen gebührt, wenn der der andern ein + Zeichen hat;

2) dass für je 2 Zellen (wie $\underset{1\,1\,1}{aRr}$ und $\underset{1\,1\,4}{aRr}$ oder wie $\underset{4\,1\,1}{aRr}$ und $\underset{4\,1\,4}{aRr}$), welche einen 4gliedrigen und einen 2gliedrigen Strahl gemeinschaftlich haben, der 4gliedrige Strahl für die eine negativ zu setzen ist, wenn er für die andere positiv ist, dass aber dem 2gliedrigen Strahle, so wie den beiden 3gliedrigen Strahlen in beiden Zellen *gleiche* Vorzeichen zustehen;

[167] 3) dass für 2 Zellen, welche (wie $\underset{1\,1\,1}{aRr}$ und $\underset{4\,1\,1}{aRr}$ oder

wie $a_1R_1r_4$ und $a_4R_1r_4$) einen 2gliedrigen und einen 3gliedrigen Strahl gemeinschaftlich haben, der 3gliedrige Strahl für beide Zellen gleiche, der 2gliedrige aber ungleiche Vorzeichen besitze, während die 4gliedrigen Strahlen beider Zellen gleiche Vorzeichen haben;

4) dass der 3gliedrige Strahl, wie aus den drei vorhergehenden Sätzen folgt, in jeder Zelle positiv zu setzen sei, wenn der der einen als positiv gesetzt ist.

Fig. 314. Stellt man sich daher unter den Quadraten $r_1r_4r_3r_2$ und
313. $r_1r_4r_8r_5$ eben so bezeichnete Flächen des Würfels $r_1r_2r_3r_4r_5r_6r_7r_8$
314. vor, sieht man ferner jedes der Dreiecke $a_1R_1r_1$ oder $a_1R_1r_4$ u. s. w. als den Stellvertreter einer der 48 Zellen an und schreibt in jeden Winkel dieser Dreiecke das Vorzeichen ein, welches dem Strahle, der sich in dem Scheitel des Winkels endigt, für die Zelle gebührt, deren Stellvertreter das fragliche Dreieck ist, so lässt sich aus Figur 314 leicht die
Fig. 315. Figur 315 ableiten. Sie stellt die Gesammtheit der Flächen des Würfels (Netz des Würfels) dar in einer solchen Verbindung, dass man, wenn jede solche Fläche mit der andern durch ein Scharniergelenk*) verbunden und um dieses beweglich wäre, durch Benutzung der Bewegung, [168] die auf diese Weise gestattet ist, leicht einen würfelförmigen Raum mittelst dieser Flächen einzuschliessen im Stande wäre.

---

*) Man verfertigt aus Pappe Modelle von ebenflächigen Körpern dadurch, dass man Netze derselben auf ein ebenes Stück Pappendeckel zeichnet, diese ihren äusseren Grenzlinien gemäss beschneidet und diejenigen Grenzlinien der einzelnen Flächen, mit welchen sie im Netze an einander stossen, durch einen, nur die halbe Dicke der Pappe durchschneidenden Einschnitt zu Stellvertretern der oben erwähnten Scharniergelenke umwandelt und dann nach und nach durch Benutzung der so gestatteten Bewegung die Umschliessung eines körperlichen Raums zu bewirken sucht, indem man die Flächen an den Kanten, welche sich bilden, da wo es nöthig ist, vorläufig mit einer hierzu vorzüglich geeigneten möglichst schlechten Sorte von Siegellack heftet, welche nachher zu besserer Befestigung mit Leim überstrichen werden. Die ersten *Krystallmodelle* der Art hat *Augustin Philipp* [illegible] gefertigt. Vergleiche *Wackernagel's* Netze zu Raumer's ABC-Buch der Krystallkunde. Berlin 1822.

Es zerfallen sonach die 48 Zellen in folgende 4 Arten:

$\alpha)\ +a,\ +R,\ +r$ oder $=+a,\ +R,\ r$
$\beta)\ +a,\ -R,\ +r$ $\quad =+a,\ -R,\ r$
$\gamma)\ -a,\ -R,\ +r$ $\quad =-a,\ -R,\ r$
$\delta)\ -a,\ +R,\ +r$ $\quad =-a,\ +R,\ r.$

Man sieht hieraus, dass es am zweckmässigsten ist, den 3gliedrigen Strahl $r = 1$ zu setzen und den Werth, welchen a hat, durch x, den aber, welchen R hat, durch y zu bezeichnen, wenn von Flächen 3gliedrig 4axiger Gestalten oder von diesen Gestalten selbst die Rede ist und es nicht auf die Grösse der einfachen Gestalt ankommt. Der allgemeinste Ausdruck für (a, R, r) ist dann $= (x\sqrt{3},\ y\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ 1)$; aus ihm können füglich die Grössen $\sqrt{3}$ und $\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ und 1 wegbleiben, wenn man unter $x \mid y$ sich stets $(x\sqrt{3},\ y\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ 1)$ vorstellt, so dass jeder Strahl

$a = x\sqrt{3} =$ dem $x$fachen des Strahles a beim 8flächner,
$R = y\sqrt{\tfrac{3}{2}} =$ - y - - - R - - ,
$r = 1 \quad =$ - 1 - - - r - -

angesehen wird, mithin bloss die Angabe von x und y nothwendig bleibt.

Das Zeichen $x \mid y = (a, R, r)$, in welchem kein Vorzeichen angegeben ist, bedeutet daher eine *flächenvollzählige* 3*gliedrig* 4*axige*, d. h. eine (2fach 3gliedrig) 8*strahlige* einfache *Gestalt*, in welcher die Zellen α, β, γ, δ alle als einander gleichwerthig betrachtet werden müssen*).

---

*) Diese Gestalt wird, wenn $x \mid y$ gleich ist:

$1 \mid 1$ der 8flächner,
$\tfrac{1}{3} \mid \tfrac{2}{3}$ der Würfel,
$\tfrac{2}{3} \mid \tfrac{2}{3}$ der 12-Rautenflächner,
$x \mid x$ ein 8×3wandiger Keilflächner,
$x \mid \tfrac{2}{3}$ ein 6×4wandiger Keilflächner,
$x \mid \dfrac{4x}{3x+1}$ ein 24wandiger Lanzenflächner,
$x \mid y$ ein 48wandiger Dreieckflächner.

Ausser den Gestalten $1 \mid 1$ und $\tfrac{1}{3} \mid \tfrac{2}{3}$ und $\tfrac{2}{3} \mid \tfrac{2}{3}$ kommen an Krystallgestalten gewöhnlich vor 2 verschiedene 8×3wandige Keilflächner, nämlich $\tfrac{5}{6} \mid \tfrac{5}{6}$ der eine und $\tfrac{8}{9} \mid \tfrac{8}{9}$ der andere; 3 verschiedene 6×4wandige Keilflächner, erstlich $\tfrac{5}{9} \mid \tfrac{2}{3}$, zweitens $\tfrac{1}{2} \mid \tfrac{2}{3}$ und

[169] Eins der beiden Zeichen $+x \mid y = (+a, R, r)$, welches die Flächen (α) und (β) umfasst, oder $-x \mid y = (-a, R, r)$, welches für (γ) und (δ) gilt, bedingt eine flächenhalbzählige (hemiedrische) 3*gliedrig* 4*axige Gestalt* und zwar eine (2fach 3gliedrig) 4*strahlige.* Es bedeutet also $+x \mid y$ die fragliche Gestalt der ersten und $-x \mid y$ jene der 2ten Stellung für ein und dasselbe unbewegt bleibende Strahlensystem. Diejenigen Zeichen, bei denen $y = \frac{2}{3}$ ist, bedeuten in ihren beiden Formen, nämlich $+x \mid \frac{2}{3}$ und $-x \mid \frac{2}{3}$, eine und dieselbe Gestalt in einer und derselben Stellung, oder vielmehr es ist bei ihnen kein Unterschied zwischen 1ster und 2ter Stellung; daher ist:

für den Würfel	$+\frac{1}{3} \mid \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \mid \frac{2}{3}$,
für den 12-Rautenflächner	$+\frac{2}{3} \mid \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \mid \frac{2}{3}$,
für den 6 × 4wandigen Keilflächner	$+x \mid \frac{2}{3} = -x \mid \frac{2}{3}$.

Uebrigens ist

$+1 \mid 1$ der 4flächner 1ster Stellung,
$-1 \mid 1$ der 4flächner 2ter Stellung,
$+x \mid x$ ein 12-Lanzenflächner 1ster Stellung,
$-x \mid x$ ein 12-Lanzenflächner 2ter Stellung,
$+x \mid \frac{4x}{3x+1}$ ein 4 × 3wandiger Keilflächner 1ster Stellung,
$-x \mid \frac{4x}{3x+1}$ ein 4 × 3wandiger Keilflächner 2ter Stellung,
$+x \mid y$ ein 24wandiger Dreieckflächner 1ster Stellung,
$-x \mid y$ ein 24wandiger Dreieckflächner 2ter Stellung;

für $y = x$ ist:

beim 8flächner	$1 \mid +1 = 1 \mid -1$,
beim 12-Rautenflächner	$\frac{2}{3} \mid +\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \mid -\frac{2}{3}$,
bei den 8 × 3wandigen Keilflächnern	$x \mid +x = x \mid -x$;

---

drittens $\frac{4}{9} \mid \frac{2}{3}$; [169] ferner 2 verschiedene 24wandige Lanzenflächner, erstlich $\frac{2}{3} \mid \frac{8}{9}$ und zweitens $\frac{5}{9} \mid \frac{5}{6}$, und endlich 3 verschiedene 48wandige Dreieckflächner, erstlich $\frac{2}{3} \mid \frac{4}{5}$, zweitens $\frac{3}{5} \mid \frac{3}{4}$ und drittens $\frac{7}{12} \mid \frac{7}{9}$.

für $y = \frac{4x}{3x+1}$ ist:

beim 8flächner	$1 \mid +1 = 1 \mid -1$,
beim Würfel	$\frac{1}{3} \mid +\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \mid -\frac{2}{3}$,
bei den 24wandigen Lanzenflächnern	$x \mid +\frac{4x}{3x+1} = x \mid -\frac{4x}{3x+1}$.

[170] Dagegen ist ausserdem

$x \mid +\frac{2}{3}$ das Zeichen für einen 12wandigen Sterzenflächner 1ster Stellung,

$x \mid -\frac{2}{3}$ das Zeichen für einen solchen Körper 2ter Stellung*).

Eins der beiden Zeichen, nämlich $x \mid +y = (a, +R, r)$, welches (α) und (δ) begreift, und $x \mid -y = (a, -R, r)$, welches (β) und (γ) als gleichwerthig umfasst, bestimmt eine *flächenhalbzählige* 3*gliedrig* 4*axige Gestalt* und zwar eine (1fach 3gliedrig) 2 × 4*strahlige*. Ist dabei $y = x$ oder $y = \frac{4x}{3x+1}$, so fällt der Unterschied 1ster und 2ter Stellung, welcher zwischen $+x \mid y$ und $-x \mid y$ vorhanden ist, hinweg, daher ist

$x \mid +y$ das Zeichen für einen 24wandigen Viereckflächner 1ster Stellung,

$x \mid -y$ das Zeichen für einen solchen 2ter Stellung**).

Jedes der beiden Zeichen:

$$\pm x \mid \pm y = (\pm a, \pm R, r),$$

welches für (α) und (γ) gilt, und

$$\pm x \mid \mp y = (\pm a, \mp R, r),$$

welches (β) und (δ) als gleichwerthig betrifft,

liefert eine *flächenhalbzählige* 3*gliedrig* 4*axige Gestalt*, welche eine 1*fach* 3*gliedrig* 8*strahlige* ist. Die erste dieser beiden Gestalten $\pm x \mid \pm y$ verhält sich zur 2ten $\pm x \mid \mp y$

*) z. B. $\frac{5}{9} \mid +\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{9} \mid -\frac{2}{3}$ oder $\frac{1}{2} \mid +\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2} \mid -\frac{2}{3}$ oder $\frac{4}{9} \mid +\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{9} \mid -\frac{2}{3}$.

**) z. B. $\frac{2}{3} \mid +\frac{4}{5}$ und $\frac{2}{3} \mid -\frac{4}{5}$ oder $\frac{3}{5} \mid +\frac{3}{4}$ und $\frac{3}{5} \mid -\frac{3}{4}$ oder $\frac{7}{12} \mid +\frac{7}{9}$ und $\frac{7}{12} \mid -\frac{7}{9}$.

gegenbildlich; jene ist eine rechte, wenn diese eine linke genannt wird.

Wenn y einen der 3 Werthe $y = \frac{4x}{3x+1}$ oder $y = x$ (also auch $y = x = 1$) oder $y = \frac{2}{3}$ hat, so verschwindet der Unterschied zwischen der rechten Gestalt $\pm x \mid \pm y$ und der linken $\pm x \mid \mp y$, sofern sie als einfache Gestalt auftritt; ausserdem aber ist dieser Unterschied vorhanden und die einfachen hierher gehörigen Gestalten sind die 24wandigen Fünfeckflächner; z. B. $\pm \frac{2}{3} \mid \pm \frac{4}{5}$ und $\pm \frac{2}{3} \mid \mp \frac{4}{5}$ oder $\pm \frac{3}{5} \mid \pm \frac{3}{4}$ und $\pm \frac{3}{5} \mid \mp \frac{3}{4}$ u. s. w.

[171] Jedes der Zeichen

$$+x \mid +y = (+a, +R, r) = (\alpha)$$
$$+x \mid -y = (+a, -R, r) = (\beta)$$
$$-x \mid -y = (-a, -R, r) = (\gamma)$$
$$-x \mid +y = (-a, +R, r) = (\delta)$$

giebt eine *flächenviertelszählige* 3*gliedrig* 4*axige*, d. h. eine 1*fach* 3*gliedrig* 4*strahlige* einfache *Gestalt.* Die beiden Gestalten $+x \mid +y$ und $-x \mid -y$ sind ebenbildlich; dasselbe gilt für $+x \mid -y$ und $-x \mid +y$. Zwei Gestalten $+x \mid +y$ und $+x \mid -y$ (oder $-x \mid -y$ und $-x \mid +y$) verhalten sich gegenbildlich. Wenn

$+x \mid +y$ die rechte solche Gestalt 1ster Stellung bedeutet,

so ist auch

$-x \mid -y$ die rechte 2ter Stellung,
$+x \mid -y$ die linke 1ster Stellung,
$-x \mid +y$ die linke 2ter Stellung.

Wenn $y = \frac{2}{3}$ und $x = \frac{1}{3}$ oder $= \frac{2}{3}$ ist, so fällt die Unterscheidung in rechte und linke Gestalten, so wie in solche 1ster und 2ter Stellung weg, wenn die Gestalt als einfache auftritt.

Wenn $y = \frac{2}{3}$, so ist $+x \mid +\frac{2}{3}$ und $-x \mid +\frac{2}{3}$ ein 12wandiger Sterzenflächner von einer und derselben Form und Stellung. Dasselbe gilt für $-x \mid -\frac{2}{3}$ und $+x \mid -\frac{2}{3}$ bei dieser Bedingung für den 12wandigen Sterzenflächner 2ter Stellung. Bei der nämlichen Bedingung gehören die beiden Ausdrücke $+x \mid +\frac{2}{3}$ und $-x \mid +\frac{2}{3}$ einem und demselben 12wandigen Sterzenflächner 1ster Stellung an. Ebenso giebt

$-x \mid -\frac{2}{3}$ sowohl als $+x \mid -\frac{2}{3}$ einen solchen Körper 2ter Stellung.

Wenn $y = x$ ist, so ist $+x \mid +x$ sowohl als $+x \mid -x$ ein 12-Lanzenflächner 1ster und $-x \mid -x$ sowohl als $-x \mid +x$ ein 12-Lanzenflächner 2ter Stellung.

Wenn $y = \frac{4x}{3x+1}$ ist, so ist $+x \mid +\frac{4x}{3x+1}$ sowohl als $+x \mid -\frac{4x}{3x+1}$ ein 4×3wandiger Keilflächner 1ster und $-x \mid -\frac{4x}{3x+1}$ sowohl als auch $-x \mid +\frac{4x}{3x+1}$ ein solcher 2ter Stellung.

Ausserdem ist $+x \mid +y$ ein 12wandiger Fünfeckflächner, der von dem ihm ebenbildlichen $-x \mid -y$ durch verschiedene Stellung sich unterscheidet, [172] während er zu den beiden in verschiedenen Stellungen befindlichen einander ebenbildlichen linken Körpern $+x \mid -y$ und $-x \mid +y$ sich gegenbildlich verhält.

Auf ähnliche Weise sind bei 3*gliedrig* 10*axigen Gestalten* 120 Zellen vorhanden, von denen jede als eine Ecke betrachtet werden kann, deren Scheitel oder Spitze im Mittelpunkte des Körpers liegt und deren Kantenlinien zusammenfallen die eine mit einem 5gliedrigen Strahle a, die andere mit einem dazu nachbarlichen 2gliedrigen Strahle R und die 3te mit einem gegen beide nachbarlichen 3gliedrigen Strahle r, welche als die Bestimmungsstrahlen dieser Zelle betrachtet werden müssen, wenn man auch hier die 3 wichtigsten Arten von Axen bei genauer Bestimmung der verschiedenen Gestalten zum Grunde legt. Es ist für den 12flächner

$$(a, R, r) = \left(1,\ \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\,(\sqrt{5}-1)},\ \sqrt{3\sqrt{5}\,(\sqrt{5}-2)}\right).$$

Aus den oben gegebenen Formeln über die wichtigsten Verhältnisse einer 5kantigen 5winkligen Ecke mit Kanten von 120° lassen sich die Werthe des Ausdruckes (a, R, r) für den 20flächner und den 30-Rautenflächner leicht ableiten, so wie die allgemeinen Formen desselben für die 20×3wandigen Keilflächner und für die 60wandigen Lanzenflächner*).

*) Vergleiche auch *Rothe*'s Arbeiten: »Ueber die regulären geometrischen Körper, die daraus entstehenden Rhomboidalkörper und insbesondere über das Rhomboidal-Triacontaeder« in Kastner's Archiv f. d. ges. N. 1825. IV. 2. S. 1—180 und 3. S. 257—300.

Nimmt man auch hier an, dass in einer der Zellen jeder der drei Bestimmungsstrahlen a, R und r einer positiven Permutation der sämmtlichen Strahlen seiner Art entspreche und daher für diese Zelle als positiv zu setzen sei, und bestimmt man auf ähnliche Weise, wie bei den 3gliedrig 4axigen Gestalten angegeben ist, die Permutation der Strahlen a, so wie jene der Strahlen R und der Strahlen r für jede Zelle, so ergiebt sich:

1) dass für jede Zelle der 5gliedrige Strahl derselben einer positiven Permutation der Strahlen seiner Art entspreche, mithin als ein positiver zu betrachten und mit $+a$ zu bezeichnen sei;

2) dass ebenso der 3gliedrige Strahl für jede Zelle einer positiven Permutation der sämmtlichen Strahlen seiner Art entspreche und also $= +r$ zu setzen sei;

[173] 3) dass der 2gliedrige Strahl für je 2 Zellen, welche ihn und einen und denselben 5gliedrigen Strahl gemeinschaftlich haben, Permutationen der sämmtlichen Strahlen R mit entgegengesetztem Vorzeichen entspreche, also für die eine $= +R$, für die andere $= -R$ zu setzen sei;

4) dass eben so für 2 Zellen, welche einem und demselben 5gliedrigen und einem und demselben 3gliedrigen Strahle angehören, die Strahlen R Permutationen der Strahlen ihrer Art mit entgegengesetztem Vorzeichen entsprechen, so dass also, wenn der eine für die fragliche ihm angehörige Zelle $= +R$ ist, der andere für die seinige, von der die Rede ist, $= -R$ zu setzen sei.

Fig. 310*) Der durch eine Abbildung versinnlichte Theil des Netzes eines 12flächners zeigt, wie auf solche Weise jeder Strahl R für 2 der ihm angehörigen Zellen als $+R$ und für die beiden andern $= -R$ zu setzen ist und wie 2 benachbarte 2gliedrige Strahlen sich in dieser Hinsicht verhalten. Jedes der 10 Dreiecke, in welche jedes der regelmässigen Fünfecke zerlegt ist, dient nämlich gewissermaassen als Stellvertreter einer der 120 Zellen, von denen nur 30 in der Abbildung angedeutet sind, aus denen die übrigen sich leicht ergänzen lassen.

Alle Zellen sind daher entweder

$$= +a, +R, +r$$

oder

$$= +a, -R, +r.$$

*) Die Fig. 310 befindet sich auf der ersten Tafel des zweiten Bändchens.

so dass der Unterschied sich ausdrücken lässt durch $a, +R, r$ und $a, -R, r$. Beachtet man das Vorzeichen bei R nicht, so hat man das Zeichen (a, R, r) für eine *flächenvollzählige 3gliedrig 10axige*, d. h. für eine *2fach 3gliedrig 20strahlige Gestalt.* Achtet man aber auf diesen Unterschied, so bedingt jedes einzelne der beiden Zeichen $(a, +R, r)$ und $(a, -R, r)$ eine flächenhalbzählige 3gliedrig 10axige, d. h. eine 1fach 3gliedrig 20strahlige Gestalt. Beide Gestalten ($(a, +R, r)$ und $(a, -R, r)$) verhalten sich im Allgemeinen gegenbildlich. Dieses spricht sich aus bei den 60wandigen Fünfeckflächnern, bei welchen das Verhältniss $a : R : r$ ein solches ist, welches einem 120wandigen Dreieckflächner entsprechen würde, wenn von dem + oder — Zeichen bei R abgesehen würde. Ist dieses Verhältniss aber kein solches, so sind die beiden Zeichen für eine Gestalt gültig, welche, als einfache Gestalt für sich betrachtet, ihrem Gegenbilde ebenbildlich ist.

Anmerkungen.

I. Hessel's Lebensgang und wissenschaftliche Bedeutung*).

Johann Friedrich Christian Hessel wurde am 27. April 1796 zu Nürnberg als Sohn eines Kaufmannes geboren. Nachdem er seine Vorbildung durch Privatunterricht und an der Nürnberger Industrieschule (späteren Realstudienanstalt) erhalten, studirte er vom Herbst 1813 an Medicin in Erlangen und Würzburg, während er zugleich eifrig mathematischen und naturwissenschaftlichen Studien oblag. Im Herbst 1817 erwarb er in Würzburg den Grad eines Doctors der Medicin und zog hierauf zu weiterer Ausbildung nach München. Dort wurde er durch *v. Bezold* mit *v. Leonhard* bekannt gemacht, mit welchem er als dessen Assistent nach Heidelberg ging. Hier betrieb er eifrig das Studium der Oryktognosie und Krystallkunde, ausserdem der Mathematik, Physik und Chemie und erwarb am 24. Januar 1821 die philosophische Doctorwürde, sowie bald darauf die Rechte eines Privatdocenten der Universität. Bereits im Herbst 1821 wurde er als ausserordentlicher Professor der Mineralogie, Technologie und der damit verwandten Wissenschaften nach Marburg berufen und nach vierjähriger erfolgreicher Thätigkeit im Herbst 1825 zum ordentlichen Professor befördert. Als solcher ist er bis zu seinem am 3. Juni 1872 erfolgten Tode, nachdem er am 1. October 1871 in aller Stille sein 50jähriges Jubiläum als Professor begangen hatte, an der Universität Marburg thätig

---

*) Vgl. den Aufsatz des Herausgebers *E. Hess: J. F. C. Hessel.* Zur Säcularfeier seines Geburtstages. Neues Jahrb. f. Mineral. 1896. Bd. II, S. 107—122. Dort finden sich ausführlichere Angaben über den Lebensgang Hessel's, seine Bedeutung als Lehrer und Forscher, sowie ein vollständiges Verzeichniss seiner Schriften.

gewesen. *Hessel*, eine einfache und bescheidene Persönlichkeit, war bis in sein spätes Alter geistig frisch und thätig; er bekleidete im Laufe der Jahre nebenbei eine grosse Anzahl von Ehrenämtern, in welchen er sich um die Verwaltung der Universität und der Stadt grosse Verdienste erwarb.

Hessel hat als Lehrer, Forscher und Schriftsteller eine sehr vielseitige Thätigkeit entwickelt. Er las, seinem Lehrauftrag entsprechend, über Oryktognosie, Geognosie, technische Mineralogie, Bergbau, Stöchiometrie, über Technologie, dann aber mit besonderer Vorliebe über Geometrie, insbesondere Stereometrie, Polyeder mit und ohne Hauptaxe, Perspective, Mechanik, Analysis des Endlichen u. s. w. Als Forscher und Schriftsteller hat er auf den Gebieten der Mineralogie und Geologie zahlreiche gründliche und erfolgreiche Untersuchungen angestellt und veröffentlicht, ausserdem mit Physik, Astronomie, Chemie, Zoologie und Botanik eingehend sich beschäftigt; nach seinen wissenschaftlichen Leistungen ist er vorzugsweise als Mathematiker und zwar speciell als scharfsinniger und bahnbrechender Forscher in dem Gebiete der Gestaltenlehre und Krystallkunde zu würdigen*).

Das vorliegende, neu herausgegebene Werk *Hessel*'s, welches als Artikel »*Krystall*« 1830 in *Gehler*'s physikalischem Wörterbuche erschien**), ist als die Hauptleistung *Hessel*'s zu bezeichnen. Als eins seiner wichtigsten Resultate enthält es, wie *Sohncke****) richtig hervorgehoben hat, die zuerst methodisch abgeleitete Aufstellung der 32 allein möglichen Krystallklassen. Indessen muss betont werden, dass weitaus der grösste Theil des Buches ganz allgemeine, von rein geometrischem Gesichtspunkte ausgehende Untersuchungen über die Gleichwerthigkeit der Theile irgend eines Raumgebildes in Beziehung auf eine Axe bringt und das Problem, die sämmtlichen möglichen Arten der Symmetrie eines solchen zu bestimmen, zur Lösung führt. Erst nachdem das Rationalitätsgesetz, welches *Hessel* »Gerengesetz« nennt, in die

---

*) Vgl. den oben citirten Aufsatz des Herausgebers.

**) Ein durch Angabe der vielen Druckfehler, Vorrede und Inhaltsverzeichniss vervollständigter Abdruck erschien 1831 (Leipzig bei E. B. Schwickert). Auf diesen Abdruck bezieht sich die hier angegebene Paginirung.

***) *L. Sohncke*, Die Entdeckung des Eintheilungsprincips der Krystalle durch *J. F. C. Hessel*. Zeitschr. f. Kryst. **18**. 1891. 486—498.

Betrachtung eingeführt ist, ergiebt sich die beschränkte Zahl von 32 allein möglichen Symmetriearten für die Gestalten, welche diesem Gesetze unterworfen sind, nämlich für die Krystalle.

In Betreff einer eingehenderen Würdigung der Bedeutung der von *Hessel* in diesem seinem Hauptwerke niedergelegten Untersuchungen muss hier auf den citirten Aufsatz des Herausgebers und die angeführte Abhandlung von *Sohncke* verwiesen werden; der letztere hat im Wesentlichen den von *Hessel* befolgten Gedankengang mit besonderer Berücksichtigung der krystallographischen Anwendung in klarer und übersichtlicher Darstellung wiedergegeben. Es möge noch erwähnt werden, dass *Hessel* später noch im Anschluss an das Hauptwerk erweiternde und vervollständigende Untersuchungen über die Anzahl der Parallel- und Coincidenz-Stellungen eines jeden denkbaren Raumdinges mit seinem Ebenbilde und seinem Gegenbilde veröffentlicht, ferner statische Beziehungen in die Betrachtung eingeführt und endlich in seiner letzten (1871 erschienenen) Schrift die Aufstellung der sämmtlichen möglichen gleicheckigen, sowie der ihnen polar entsprechenden gleichflächigen Polyeder der ersten Art gegeben hat*.

Hessel's Hauptwerk blieb nach seinem Erscheinen bis zum Jahre 1891 fast gänzlich unbeachtet, wozu allerdings die etwas schwer verständlichen allgemeinen Untersuchungen, die mitunter schwerfälligen und umständlichen mathematischen Entwickelungen, ausserdem die eigenthümliche deutsche Kunstsprache** und auch die sehr zahlreichen Druckfehler der ersten Ausgabe beigetragen haben mögen. Die späteren Bearbeiter desselben Problems, wie *Bravais**** (1849), *Gadolin* (1867), *Curie* (1884), *Minnigerode* (1887) u. A. haben, ohne die Arbeit *Hessel's* zu berücksichtigen, freilich

* Vgl. in dem citirten Aufsatze des Herausgebers die unter [illegible] und [illegible] angeführten und besprochenen Schriften *Hessel's*.

** Vgl. die von *Hessel* gegebene Rechtfertigung dieser Kunstsprache auf S. [illegible] der Vorrede.

*** Die Abhandlungen von A. *Bravais* über symmetrische Polyeder sind als Nr. [illegible] von Ostwald's Klassikern der exakten Wissenschaften herausgegeben. — *Bravais* scheint die *Hessel*'sche Arbeit [illegible], aber nicht vollständig verstanden zu haben; hierauf bezieht sich eine spätere Bemerkung *Hessel's* in dem Programm [illegible], in welcher er darstellt, dass *Bravais* bei seiner Aufstellung eine Klasse, die der [illegible] Viertelflächner des [illegible] Systems übersehen habe.

auch unter Anwendung eleganterer Methoden, wie z. B. der Benutzung der Projection auf eine Kugelfläche, der Beziehungen zur Gruppentheorie u. s. w., dieselben Resultate, wie *Hessel*, erhalten.

Wenn auch schon *Quenstedt**) im Jahre 1873 *Hessel* einige Gerechtigkeit widerfahren liess, indem er ihn als einen gründlichen Vorläufer von *Miller* bezeichnete und den Umstand, dass *Hessel*'s vortreffliche Hauptarbeit wenig Beachtung in Deutschland fände, lediglich der eigenthümlichen Darstellung und Nomenclatur *Hessel*'s zuschrieb, so hat doch erst im Jahre 1891 *L. Sohncke* in der mehrfach erwähnten Abhandlung durch eine dankenswerthe historische Studie auf *Hessel*'s, als des Entdeckers des Eintheilungsprincips der Krystalle, grosses Verdienst nachdrücklich hingewiesen.

Unmittelbar nach dem Erscheinen der *Sohncke*'schen Arbeit wurden auch durch *A. Schoenflies* in einem inhaltreichen Buche**) die Verdienste *Hessel*'s bezüglich der zuerst von ihm aufgestellten, durch ihre Symmetrie von einander verschiedenen Krystallklassen gebührend gewürdigt und in helles Licht gesetzt. Indem *Schoenflies* die Beziehungen dieser Untersuchungen zu den rein mathematischen der Gruppentheorie entwickelte und hervorhob, machte er auch die Mathematiker mit den Leistungen *Hessel*'s auf diesem Gebiete genauer bekannt.

Endlich darf der Herausgeber, welcher noch ein Schüler *Hessel*'s zu sein das Glück hatte, wohl auch hier darauf hinweisen, dass er, an die letzte *Hessel*'sche Arbeit anknüpfend, schon vom Jahre 1872 an bemüht gewesen ist, in zahlreichen Schriften***) und einem ausführlicheren Buche†) die grundlegenden Leistungen *Hessel*'s in der Theorie der gleicheckigen

---

*) *Fr. Aug. Quenstedt*, Grundriss der bestimmenden und rechnenden Krystallographie. Tübingen 1873. S. 61 der geschichtlichen Einleitung.

**) *A. Schoenflies*, Krystallsysteme und Krystallstructur. Leipzig 1891.

***) *E. Hess*, Sitzungsberichte der Gesellsch. z. Bef. d. ges. Naturw. zu Marburg 1872—1882. — Ueber gleicheckige und gleichkantige Polygone. Cassel 1874. — Ueber die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder. Cassel 1876. — Ueber vier Archimedeische Polyeder höherer Art. Cassel 1878.

†) *E. Hess*, Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung u. s. w. Leipzig 1883.

und der gleichflächigen Polyeder nach Gebühr zu würdigen und zur Anerkennung zu bringen.

Nachdem nunmehr eine spätere Generation dem gründlichen Forscher den ihm gebührenden Lorbeer, welchen ihm seine Zeitgenossen verweigerten, zuerkannt hat, wird die Einreihung seines Hauptwerkes in die Werke der Klassiker der exacten Wissenschaften die Billigung und Zustimmung der Fachgenossen finden. Der Herausgeber, welcher als Schüler *Hessel's* der an ihn ergangenen Aufforderung mit grosser Freude gefolgt ist, hat sich nicht für berechtigt gehalten, an dem Inhalte des Werkes wesentliche Aenderungen vorzunehmen, so nahe es auch gelegen hätte, an manchen Stellen etwas einfachere und dem gegenwärtigen Stande der Mathematik mehr entsprechende Entwickelungen zu geben; er hat sich vielmehr darauf beschränkt, unter Vornahme einiger Kürzungen weitere Druckfehler der zweiten Ausgabe und offenbare Versehen zu beseitigen und mehrere Noten hinzuzufügen.

Möge das klassische Werk *Hessel's* in dem neuen Gewande bei den Mathematikern und Mineralogen immer mehr die verdiente Anerkennung und Würdigung finden!

II. Specielle Noten zum Text des ersten Bändchens.

Zu S. 20. Die von *Hessel* eingeführten Bezeichnungen *ebenbildlich gleich* (statt deckbar, congruent) und *gegenbildlich gleich* (statt spiegelbildlich, symmetrisch) dürften wohl als besonders passend anzuerkennen sein, da ihnen auch die Substantiva *Ebenbild* und *Gegenbild* (bez. *Nebengegenbild*) entsprechen.

Zu S. 26 flg. Der Ausdruck *p-gliedrig* für Strahlensysteme, ebene Figuren, Körper, insbesondere für Axen ist gegenwärtig durch den von *Sohncke* eingeführten *p-zählig* verdrängt worden.

Zu S. 32 Anmerkung. Die von *Hessel* hier eingeführte Bezeichnung *pseit* für ein (einfaches) *reguläres p*eck steht nicht in Uebereinstimmung mit der seit *Steiner* allgemein angenommenen Bezeichnung der neueren Geometrie, nach welcher eine durch p Gerade gebildete ebene Figur ein (vollständiges) *pseit* heisst.

Zu S. 40 unten und *S. 41.* Der kürzere und bezeichnendere Ausdruck: »*direct symmetrische Mittelebene*« ist von *Hessel* selbst in späteren Schriften, wie auch in seinen Vorlesungen gebraucht worden.

Zu S. 43. Die charakteristische Eigenschaft einer »gerenstelligen«, p-gliedrigen Axe eines Körpers lässt sich (nach *Sohncke* a. a. O.) auch so ausdrücken, dass die Flächenvertheilung um die beiden Enden einer solchen Axe *sphenoidisch* ist, d. h. dass bei Halbirung des Körpers durch eine senkrecht zur Axe durch das Centrum gelegte Ebene die Flächen der einen Hälfte durch Drehung um $\frac{360^{\circ}}{2p}$ um diese p-gliedrige Axe in direct symmetrische Lage zu den ungedreht gebliebenen Flächen der anderen Hälfte gelangen. — Der Ausdruck »*gerenstellig*«, wie der später gebrauchte »*Gerengesetz*« (unter XIII des zweiten Bändchens) rührt von »*Gere*« her, welche bei norddeutschen Tischlern die Diagonale eines Quadrates bezeichnet.

Zu S. 64. Die hier gegebene Vereinigung der hauptaxigen Strahlensysteme in 1- und m-maassige Systeme ist für die betrachteten Fälle $m = 3, 2, 1$, wie sich später ergiebt, von fundamentaler Bedeutung für die Aufstellung der hauptaxenlosen Krystallgestalten.

Zu S. 151—156. Den hier entwickelten Theil der Bezeichnungslehre hat *Hessel* selbst als wesentlicher Verbesserung und einer ausführlichen Erläuterung, welche namentlich mehr geometrische Anschauung gewähre, bedürftig bezeichnet. In der Tabelle S. 154 (Z. 8 v. u.) —155 hätten ausser den Formeln $((-a), \infty, \infty)$, $(\infty, (-1), \infty)$ und $(\infty, \infty, (-1))$ auch alle jene Formeln wegbleiben müssen, welche drei Minus-Zeichen oder zwei Minus- und ein Unendlich-Zeichen enthielten, und zwar aus dem auf S. 155 Z. 15—20 angegebenen Grunde und weil sie erst im Abschnitt X (S. 3 flg. des zweiten Bändchens) ihre gehörige Deutung erlangen. Die Zahl der 59 angegebenen Fälle vermindert sich hiernach um $7 + 9 = 16$, sodass 43 wesentliche Fälle übrig bleiben.

Zu S. 158. Die hier und im Folgenden benutzte Eintheilung der Permutationen in die beiden Classen (der positiven und der negativen Permutationen) ist die bekannte von *Bezout*, *Laplace* und *Mollweide* herrührende, welche für die Determinantenlehre von fundamentaler Bedeutung ist. *Hessel* hat in seiner citirten Schrift (Ueber positive und negative

Permutationen) die Grundlehren der Determinantentheorie, welche damals noch nicht Gemeingut der Mathematiker waren (obwohl die ersten Untersuchungen auf *Leibniz* zurückgehen), selbständig und mit Rücksicht auf seine besonderen Zwecke hergeleitet. Die geometrische Anwendung, welche hier von der Vorzeichenbestimmung der beiden Permutationsklassen für die hauptaxigen und hauptaxenlosen Gestalten gemacht wird, ist jedenfalls als sehr interessant zu bezeichnen.

Zu S. 179. Die Bezeichnung $x \mid y = (x\sqrt{3},\ y\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ 1)$ ist wesentlich mit der *Naumann*'schen Darstellung durch das Parameterverhältniss $m : n : 1$ übereinstimmend. Man vgl. hierzu die Bemerkungen *Hessel*'s in dem Abschnitte (des zweiten Bändchens): »Das Wichtigste aus der Geschichte der Krystallkunde« unter »*Naumann*«.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

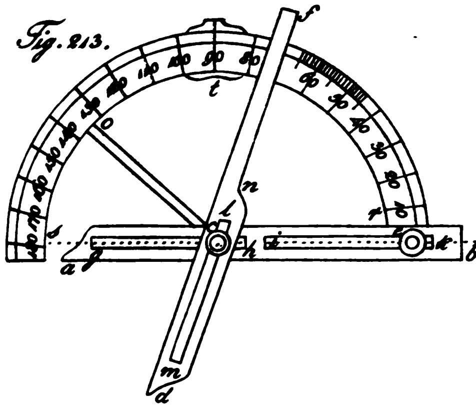
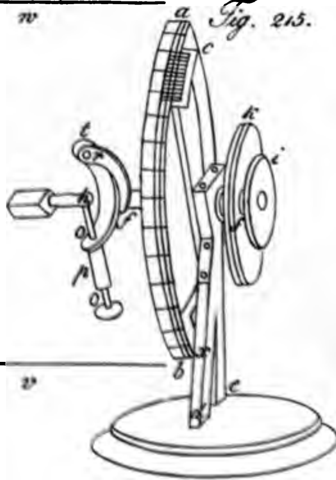
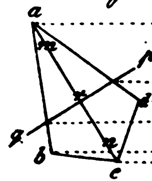


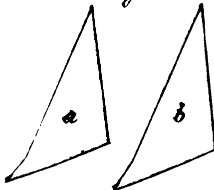
Fig.

l



l





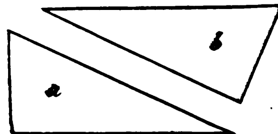
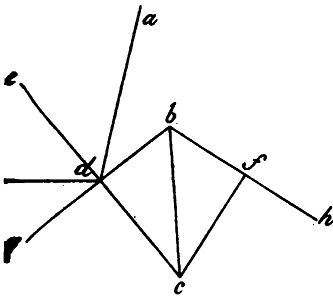
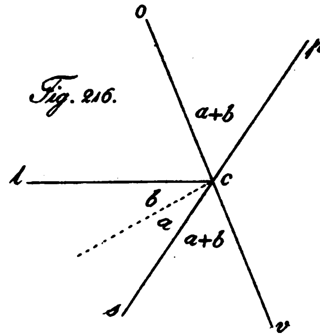


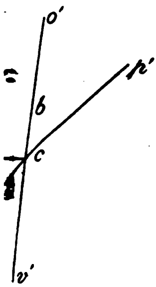
Fig.

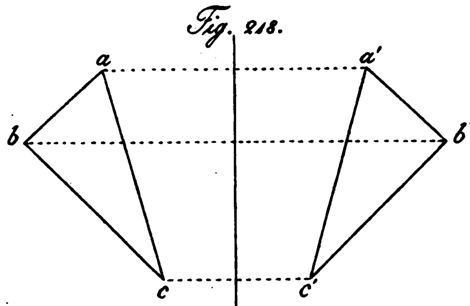
Hessel del.

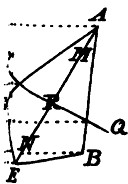
Verlag von

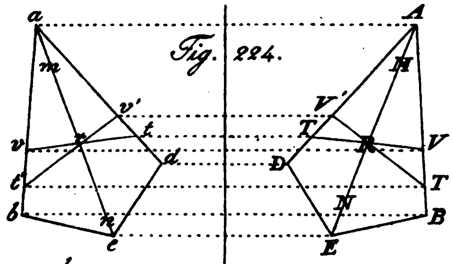


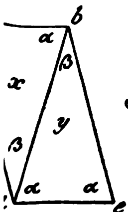


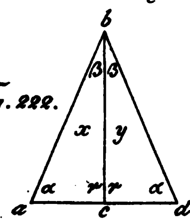


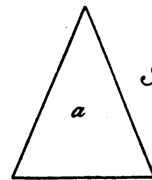


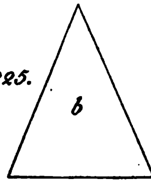








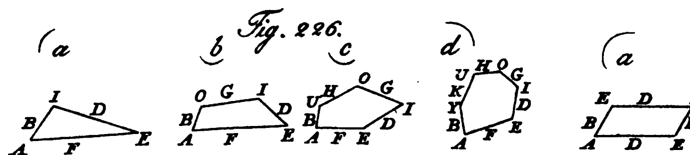


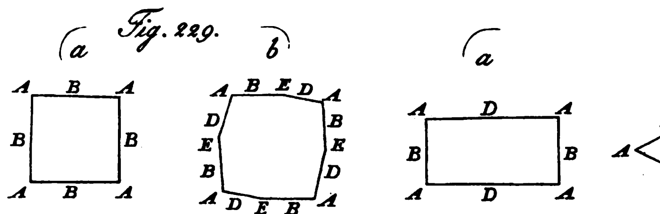


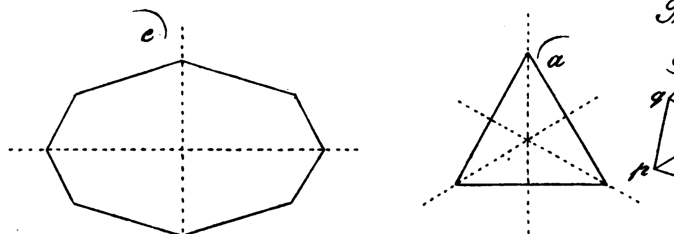
gelmann in Leipzig

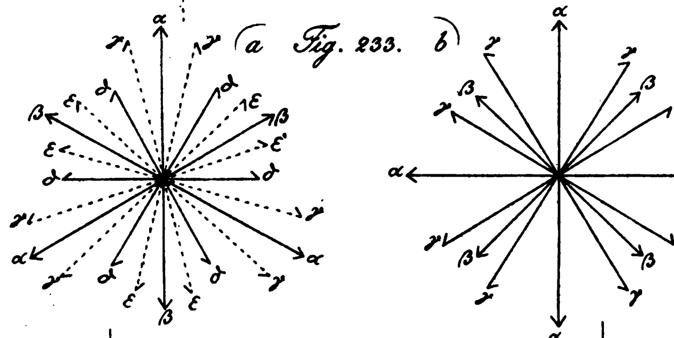
Ant. Karcher sc.

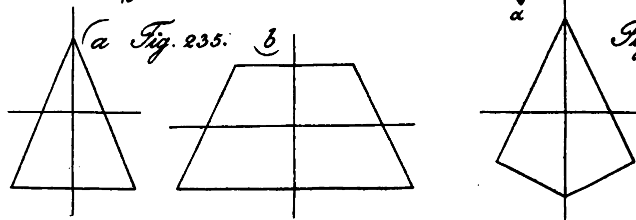

UNIV
OF
MICH

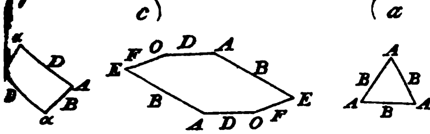

Fig. 226.
a
b
c
d
a
I
D
B
A
F
E
O G I
D
B
A F E
H O G
U
I
B
D
A F E
U H O G
K I
Y D
B E
A F
E D
B
A D E

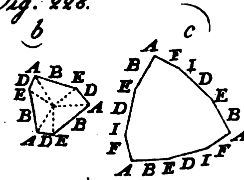

Fig. 229.
a
b
a
A B A
B B
A B A
A B E D A
D B
E E
B D
A D E B A
A D A
B B
A D A

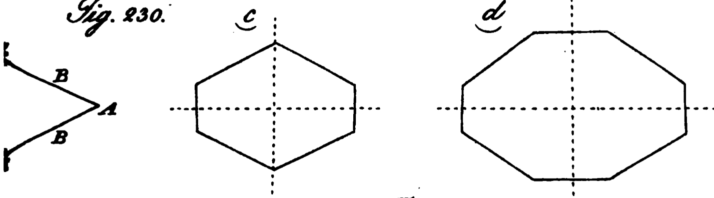

c
a
q
p

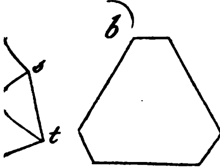

a Fig. 233. b
α
β
γ
δ
ε

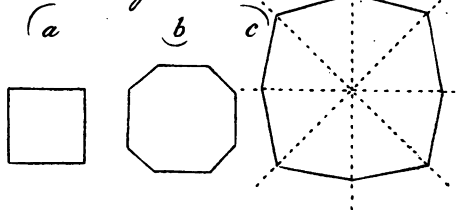

a Fig. 235. b

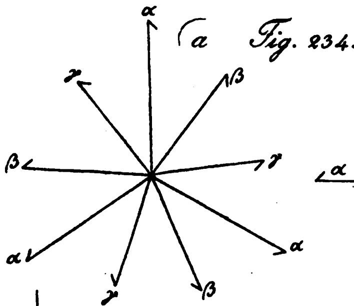

Fig. 227.
c
a

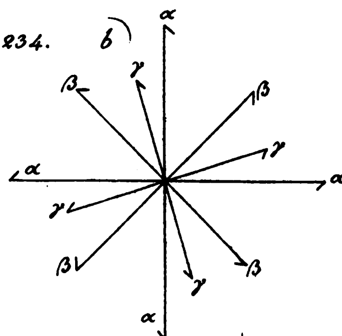

Fig. 228.
b
c

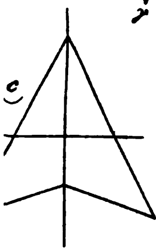

Fig. 230.
c
d

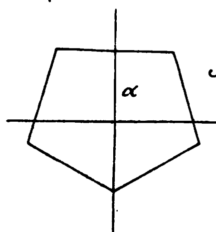

231.

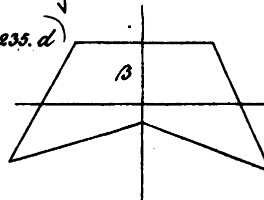

b
a
Fig. 232.
b
c


a
Fig. 234.


b

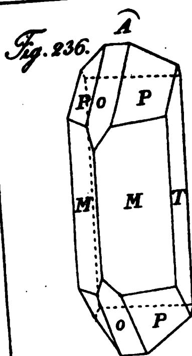

c

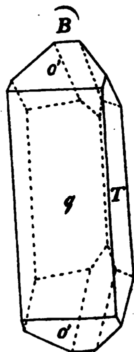

α

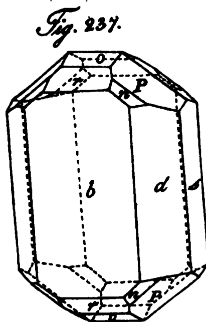

Fig. 235. d
β

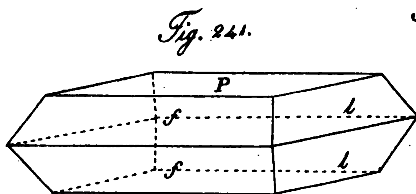

UNIV.
OF
MICH.

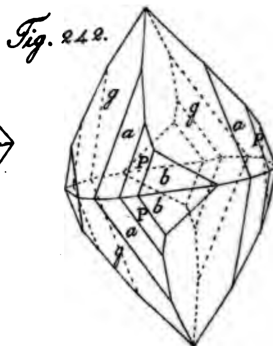

UNIV.

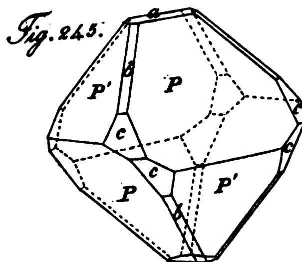


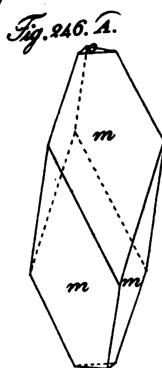


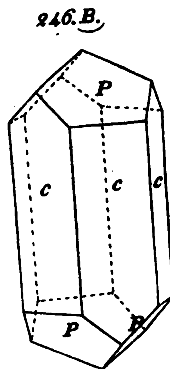


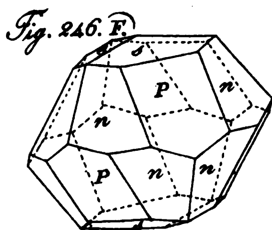












Hessel del.

Verlag von Wilh

Fig. 238.

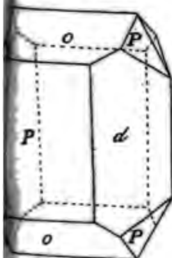


Fig. 239.

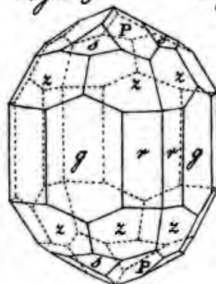


Fig. 240.

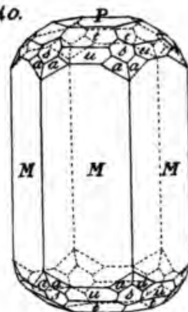


Fig. 243.

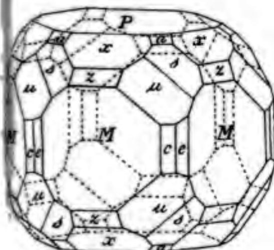
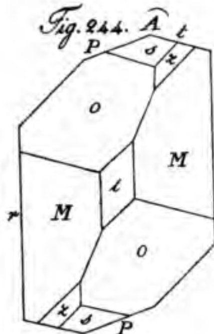
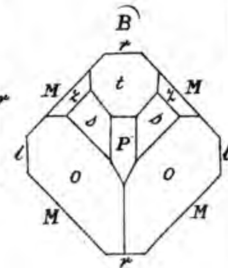
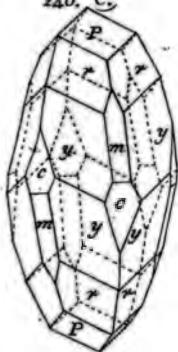


Fig. 244. A

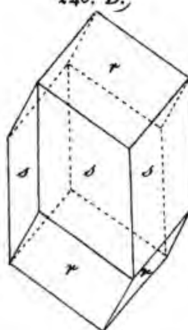




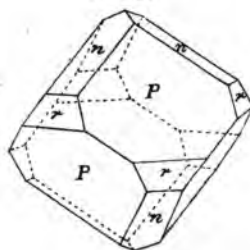
246. C.



246. D.



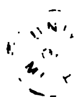
246. E.

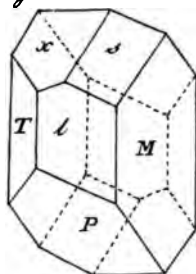


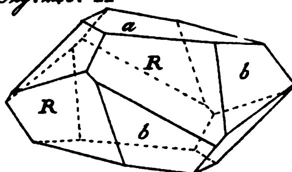
…gelmann in Leipzig

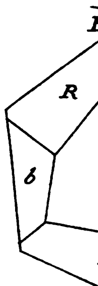
Ant. Karcher sc.

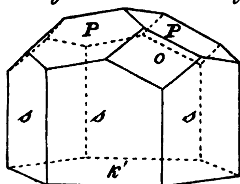

UNIV.
OF
MICH.

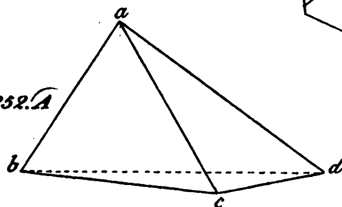


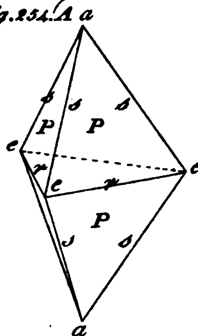


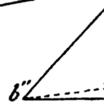


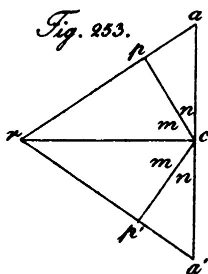


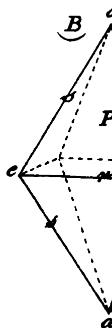


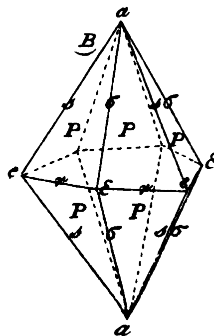


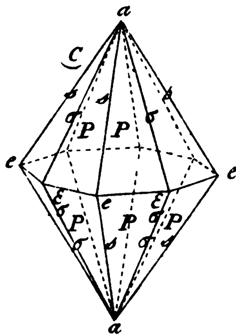


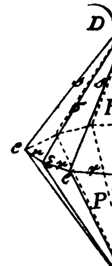








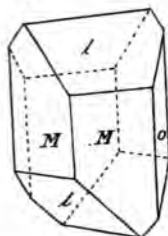




Hessel del.

Verlag von

Fig. 249. A



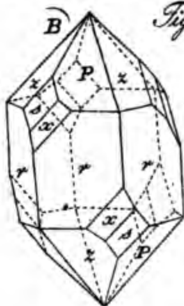
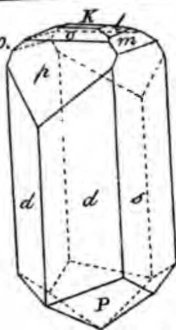
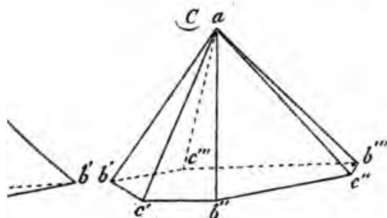
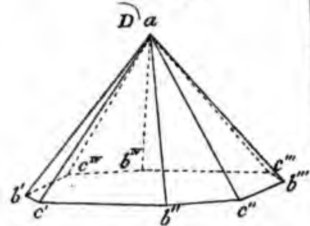


Fig. 250.







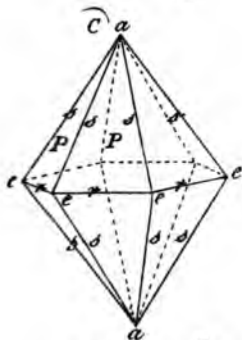


Fig. 255. A

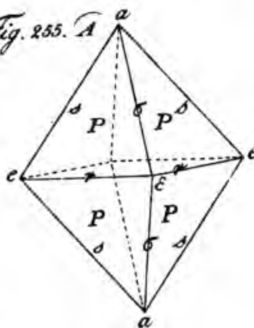


Fig. 256.

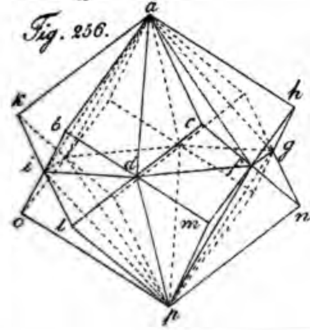


Fig. 257.

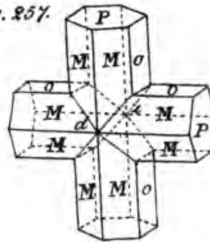






Fig. 258.

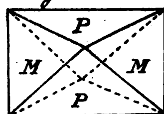


Fig. 259.

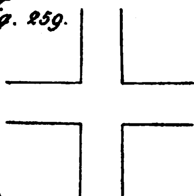
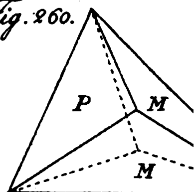


Fig. 260.



d)

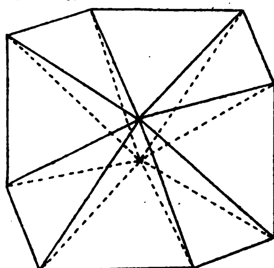


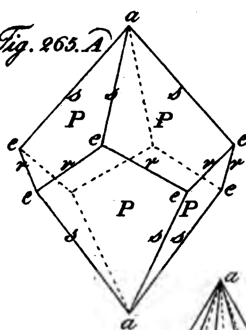
Fig. 262. a)



b)



Fig. 265. A)



B)

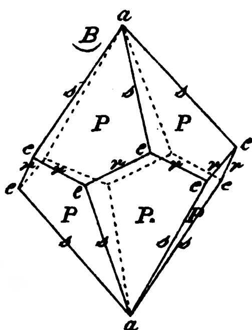


Fig. 269.

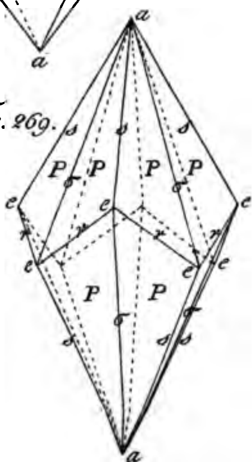
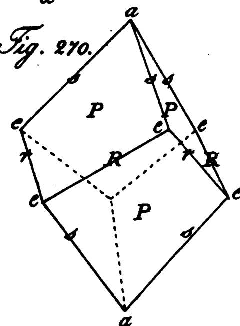
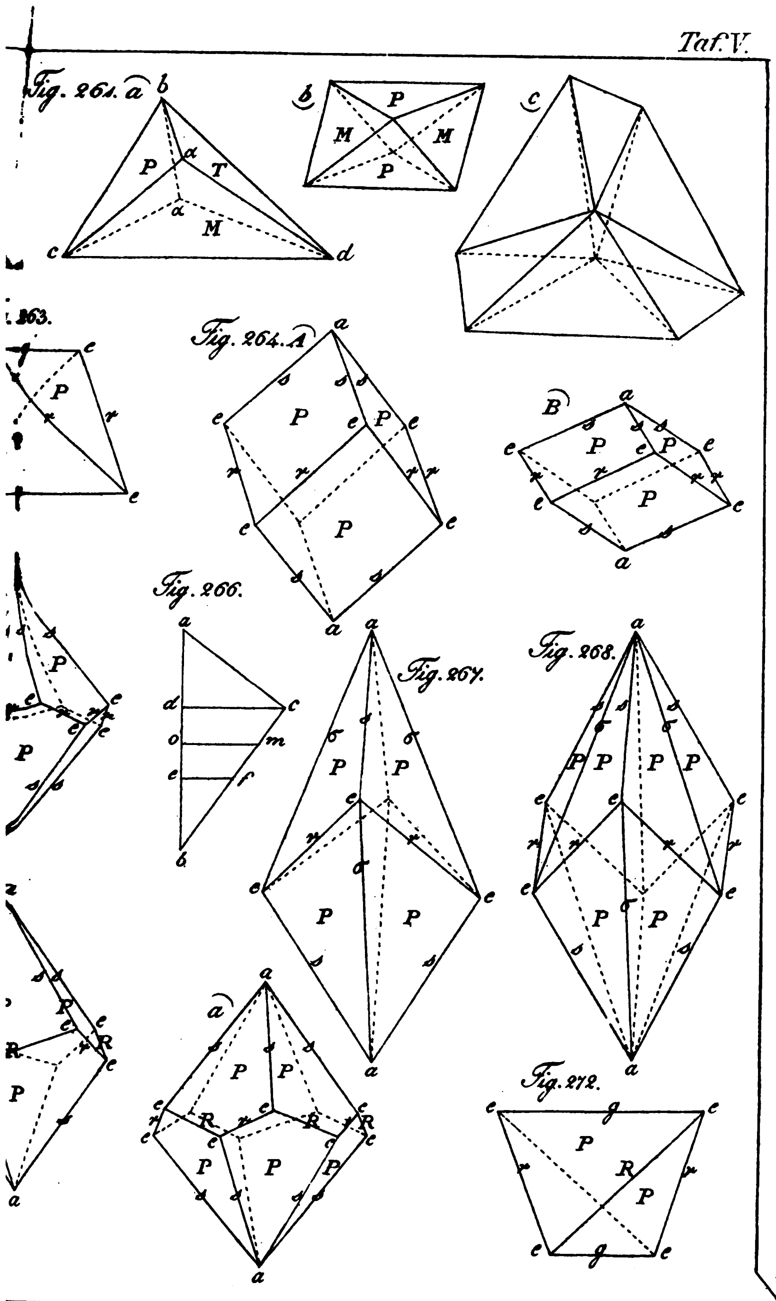


Fig. 270.



Hessel del.

Verlag von



lmann in Leipzig.

Ant. Karcher sc.


UNIV.
OF
MICH.

Fig. 273.

Fig. 274.

Fig. 275.

Fig. 279.

Fig. 280.

Fig. 283.

Fig. 284.

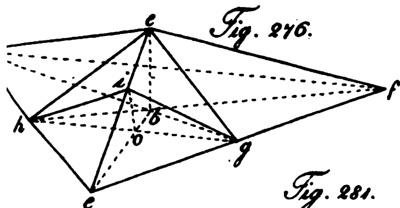


Fig. 276.

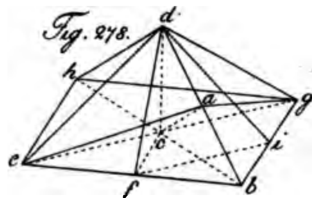


Fig. 278.

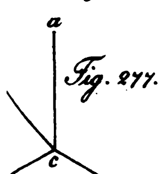


Fig. 277.

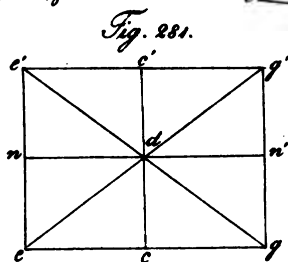


Fig. 281.

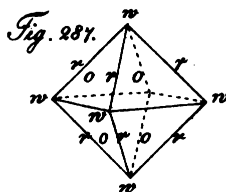
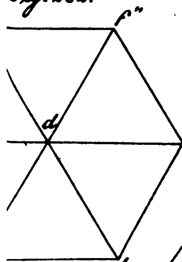


Fig. 287.



Fig. 282.



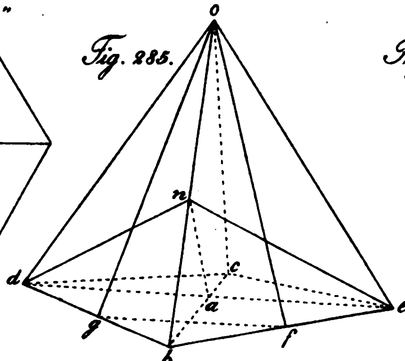


Fig. 285.

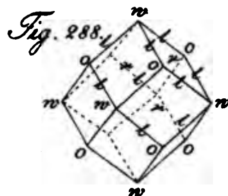
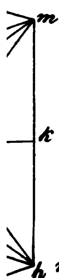


Fig. 288.

Fig. 290.



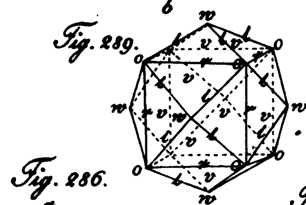


Fig. 289.

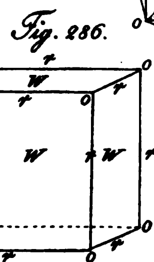


Fig. 286.

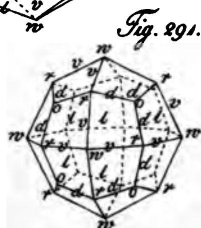


Fig. 291.

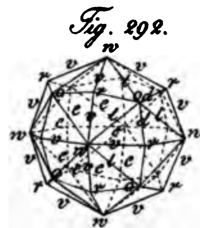
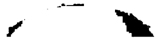
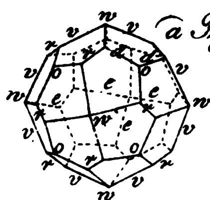
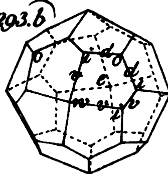


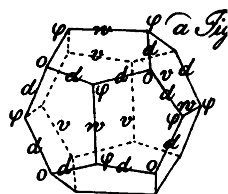
Fig. 292.

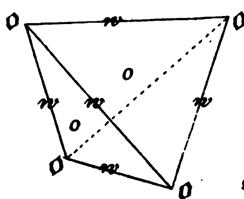
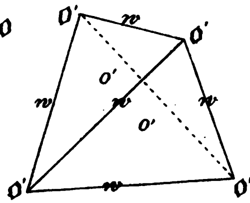


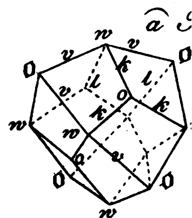


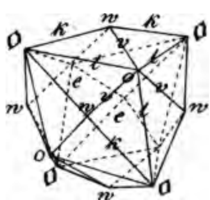
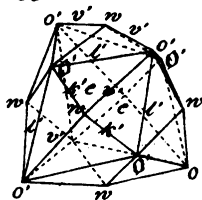

UNIV.
OF



Fig. 293. a b





Fig. 296. a b





Fig. 299. a b

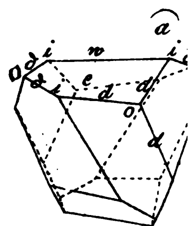


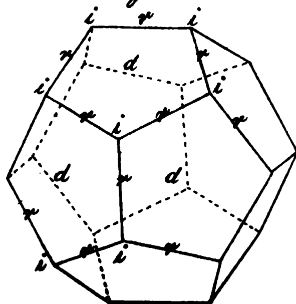
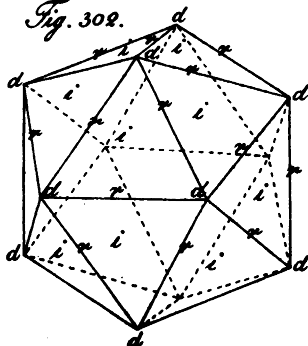
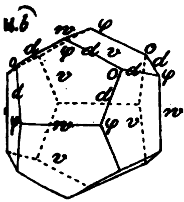
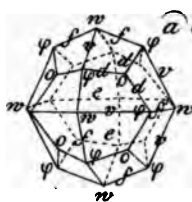
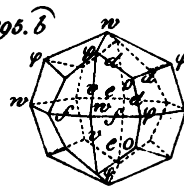
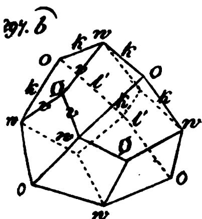
Fig. 301.


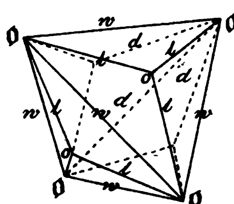
Fig. 302.


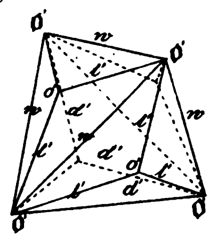


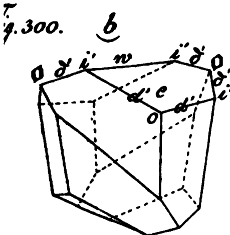


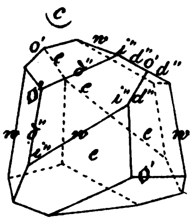


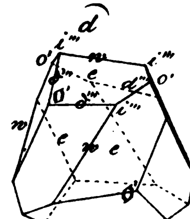


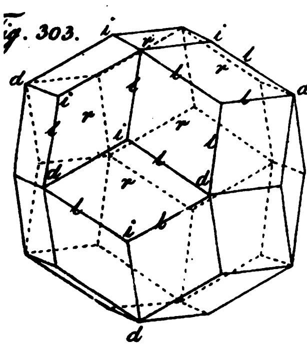


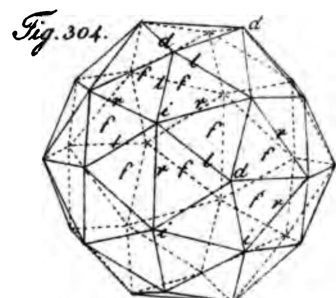












elmann in Leipzig. Ant. Karcher sc.



Nr. 27. **Robert Bunsen,** Untersuchungen üb
1843.) Herausgegeben von Adolf v
Text. (148 S.) M 1.80.



» 28. **L. Pasteur,** Über die Asymmetrie b
ganischen Verbindungen. (1860.) Ü
Ladenburg. (36 S.) M —.60.

» 29. **L. Wilhelmy,** Über das Gesetz, nach welchem die Einwirkung der Säuren auf den Rohrzucker stattfindet. (1850.) Herausgegeben von W. Ostwald. (47 S.) M —.80.

» 30. **S. Cannizzaro,** Abriss e. Lehrganges der theoret. Chemie, vorgetr. an d. k. Universität Genua. (1858.) Übersetzt von Dr. Arthur Miolati aus Mantua. Herausg. v. Lothar Meyer. (61 S.) M 1.—.

» 34. **R. Bunsen u. H. E. Roscoe,** Photochemische Untersuchungen. (1855—1859.) Erste Hälfte. Herausgegeben v. W. Ostwald. Mit 13 Figuren im Text. (96 S.) M 1.50.

» 35. **Jacob Berzelius,** Versuch, die bestimmten und einfachen Verhältnisse aufzufinden, nach welchen die Bestandtheile der unorgan. Natur mit einander verbunden sind. (1811—1812.) Herausgegeben von W. Ostwald. (218 S.) M 3.—.

» 38. **R. Bunsen und H. E. Roscoe,** Photochemische Untersuchungen (1855—1859.) Zweite Hälfte. Herausgegeben von W. Ostwald. Mit 18 Figuren im Text. (107 S.) M 1.60.

» 42. **A. v. Humboldt u. J. F. Gay-Lussac,** Das Volumgesetz gasförm. Verbindungen. Abhandlungen. Herausg. v. W. Ostwald. (42 S.) M —.60.

» 45. **Humphry Davy,** Electrochemische Untersuchungen. Vorgelesen in der königl. Societät zu London als Bakerian Lecture am 20. November 1806 und am 19. November 1807. Herausgegeben von W. Ostwald. Mit 1 Tafel. (92 S.) M 1.20.

» 58. **Carl Wilhelm Scheele,** Chemische Abhandlung von der Luft und dem Feuer. (1777.) Herausgegeben von W. Ostwald. Mit 5 Textfiguren. (112 S.) M 1.80.

» 66. **J. W. Doebereiner** und **Max Pettenkofer,** Abhandlungen über die Anfänge des natürlichen Systemes der chemischen Elemente, nebst einer geschichtlichen Übersicht der Weiterentwickelung der Lehre von den Triaden der Elemente. Herausgegeben von Lothar Meyer. (34 S.) M —.60.

» 68. **Lothar Meyer** und **D. Mendelejeff,** Abhandlungen über das natürliche System der chemischen Elemente. (1864—1869 und 1869—1871.) Hrsgeg. v. Karl Seubert. Mit 1 Tafel. (134 S.) M 2.40.

» 72. **G. Kirchhoff** und **R. Bunsen,** Chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen. (1860.) Herausgegeben von W. Ostwald. Mit 2 Tafeln und 7 Figuren im Text. (74 S.) M 1.40.

» 74. **Claude Louis Berthollet,** Untersuchungen über die Gesetze der Verwandtschaft. (1801.) Herausg. von W. Ostwald. (113 S.) M 1.80.

» 75. **Axel Gadolin,** Abhandlung über die Herleitung aller krystallographischer Systeme mit ihren Unterabtheilungen aus einem einzigen Prinzipe. (Gelesen den 19. März 1867.) Deutsch herausgegeben von P. Groth. Mit 26 Textfiguren und 3 Tafeln. (92 S.) M 1.50.

» 88. **Joh. Friedr. Christian Hessel,** Krystallometrie oder Krystallonomie und Krystallographie, auf eigenthümliche Weise und mit Zugrundelegung neuer allgemeiner Lehren der reinen Gestaltenkunde, sowie mit vollständiger Berücksichtigung der wichtigsten Arbeiten und Methoden anderer Krystallographen. (1830.) Erstes Bändchen. Mit 8 Tafeln. Herausgegeben von E. Hess. (192 S.) M 3.—.

» 89. —— —— (1830.) Zweites Bändchen. Mit 3 Tafeln. Herausgegeben von E. Hess. (165 S.) M 2.80.

» 92. **H. Kolbe,** Über den natürlichen Zusammenhang d
den unorganischen Verbindungen, die wissensch
einer naturgemässen Classification der organischen
(1859.) Herausgegeben von Ernst von Meyer